

# الكبرى أوي

♦♦ في الرياضيات ♦♦



المهندس

محمود قاسم

# أولاً: الجبر

## المراجعة النهائية للصف الثاني الثانوي [أدبي]

### المتابعة

**التعريف** المتابعة هي دالة مجالها  $\mathbb{R}^+$  أو مجموعة جزئية منها ومجالها المقابل هو  $\mathbb{R}$

$$(u_n) = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots)$$

**الصورة العامة**

ويسمى أيضاً الحد النوني ويرمز له بالرمز  $u_n$  وهو صورة الحد الذي ترتيبه  $n$

**الحد العام**



**بمعرفة** بعض حدود المتابعة

**بمعرفة** الحد العام للمتابعة

**يمكن** إدراك العلاقة بين ترتيب الحد وقيمته وتكوين الحد العام.

**يمكن** إيجاد حدودها.

### مثال

أوجد الحد العام للمتابعة :

$$\left( \dots, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6} \right)$$

ومنه أوجد قيمة :  $u_{10}$

تسمى هذه المتابعة

بالتذبذبية أ، متباعدة الإشارة

**الحل**

بملاحظة العلاقة بين ترتيب الحد وقيمته نجد أن

ترتيب الحد : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...

قيمة الحد :  $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots$

ويمكن كتابة الحدود بعد إدراك العلاقة بين قيمتها وترتيبها

$$\dots, \frac{1(1-)}{1+5}, \frac{2(1-)}{2+5}, \frac{3(1-)}{3+5}, \frac{4(1-)}{4+5}, \dots$$

$$\therefore \text{الحد العام هو } u_n = \frac{n(1-)}{n+5}$$

$$\therefore u_{10} = \frac{10(1-)}{10+5} = \frac{1}{15}$$

### مثال

اكتب الحدود السبعة الأولى من المتابعة

$$(u_n) \text{ حيث : } u_n + u_{n-1} = u_{n+1}$$

$$u_1 = u_2 = 1$$

تسمى هذه المتابعة

متابعة فيبوناتشي

**الحل**

$$u_1 = u_2 = 1, u_3 = u_2 + u_1 = 2$$

$$u_4 = u_3 + u_2 = 3$$

$$u_5 = u_4 + u_3 = 5$$

$$u_6 = u_5 + u_4 = 8$$

$$u_7 = u_6 + u_5 = 13$$

$\therefore$  الحدود السبعة الأولى هي :

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13)$$



## أمثلة لبعض المتتابعات وحدها العام



- المتتابعة:  $(1, 4, 9, 16, \dots)$  حدها العام  $u_n = n^2$
- المتتابعة:  $(1, 8, 27, 64, \dots)$  حدها العام  $u_n = n^3$
- المتتابعة:  $((2 \times 3), (3 \times 4), (4 \times 5), (5 \times 6), \dots)$  حدها العام  $u_n = (n+1)(n+2)$
- المتتابعة:  $(2, 4, 8, 16, \dots)$  حدها العام  $u_n = 2^n$
- المتتابعة:  $(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$  حدها العام  $u_n = \frac{2^n}{n}$

### المتتابعة غير المنتهية

هي التي لها عدد غير منته من الحدود.

**فمثلاً:**

• المتتابعة:  $(1, 4, 9, 16, \dots)$

غير منتهية.

• المتتابعة:  $(u_n)$  حيث  $u_n + 1 = u_{n+1}$

$\exists n$  ص<sup>+</sup> تكون غير منتهية.

### المتتابعة المنتهية

هي المتتابعة التي عدد حدودها محدود.

**فمثلاً:**

• المتتابعة:  $(2, 7, 12, 17, \dots, 37)$

تكون منتهية.

• المتتابعة:  $(u_n)$  حيث  $u_n = \frac{n+5}{2}$

$\exists n$   $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  تكون منتهية.

### المتتابعة الثابتة

$u_n = 1 + u_{n-1}$  أى أن

$u_n - u_{n-1} = \text{صفر}$

**فمثلاً:**

$(-3, -3, -3, -3, \dots)$

### المتتابعة التناقصية

$u_n > 1 + u_{n-1}$  أى أن

$u_n - u_{n-1} > \text{صفر}$

**فمثلاً:**

$(128, 64, 32, 16, \dots)$

### المتتابعة التزايدية

$u_n < 1 + u_{n-1}$  أى أن

$u_n - u_{n-1} < \text{صفر}$

**فمثلاً:**

$(1, 9, 17, 25, \dots)$





بين أى المتتابعات الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها ثابتة :

$$\left(\frac{1}{n}\right) = (n) \quad (n^2) = (n) \quad (3) = (n)$$

الحل

$$(1) \quad (n) = (n) - (n+1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \text{ صفر لكل } n \in \mathbb{N}^+ \\ \therefore \text{ المتتابعة : } (n) = \left(\frac{1}{n}\right) \text{ تناقصية.}$$

$$(2) \quad (n) = (n) - (n+1) = n^2 - (n+1)^2 = n^2 - (n^2 + 2n + 1) = -2n - 1 < 0 \text{ صفر لكل } n \in \mathbb{N}^+ \\ \therefore \text{ المتتابعة : } (n) = (n^2) \text{ تزايدية.}$$

$$(3) \quad (n) = (n) - (n+1) = 3 - 3 = 0 \text{ صفر} \quad \therefore (n) = (3) \text{ ثابتة}$$

### المتسلسلات ورمز التجميع

المتسلسلة هى مجموع حدود المتتابعة فإذا كانت المتتابعة :

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) \\ \text{فإن المتسلسلة المرتبطة بها هى : } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \\ \text{وتكتب برمز التجميع } \sum_{r=1}^{\infty} a_r$$

فمثلاً :

$$(1) \quad \text{إذا كانت : } (n) \text{ متتابعة حدها العام } a_n = (1-n)^2$$

$$\text{فإن المتسلسلة } \sum_{r=1}^{\infty} a_r = (1-1)^2 + (1-2)^2 + (1-3)^2 + \dots = 0 + 1 + 4 + \dots$$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 + \dots \text{ (متسلسلة منتهية)}$$

$$(2) \quad \text{إذا كانت : } (n) \text{ متتابعة حدها العام } a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{فإن المتسلسلة } \sum_{r=1}^{\infty} a_r = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \text{ (متسلسلة غير منتهية)}$$



## الخواص الجبرية لرمز التجميع (في حالة مجموع متتابعة بدءًا من الحد الأول):

$$\frac{(1+n^2)(1+n)n}{2} = \sum_{i=1}^n i^2$$

$$\frac{(1+n)n}{2} = \sum_{i=1}^n i$$

$$n = \sum_{i=1}^n 1$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 \pm \sum_{i=1}^n i^2 = (\pm) \sum_{i=1}^n i^2$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n i^2$$

مع ملاحظة أن:  $\sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = n^2$

أمثلة



$$3240 = \frac{(1+80)80}{2} = \sum_{i=1}^{80} i$$

$$100 = 7 \times 10 = 7 \sum_{i=1}^{10} 1$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 + \sum_{i=1}^{10} i^2 = (1+1+1) \sum_{i=1}^{10} i^2$$

$$\frac{(1+10 \times 2)(1+10)10}{6} = \sum_{i=1}^{10} i^2$$

$$\frac{(1+10 \times 2)(1+10)10}{6} = 1 \sum_{i=1}^{10} i^2 +$$

$$380 =$$

$$1370 = 10 \times 1 + \frac{(1+10)10}{2} +$$

$$(2-22) \sum_{i=1}^{10} i^2 = (2-22) \sum_{i=1}^{10} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{22} i^2 = \sum_{i=1}^{22} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 - 22 \sum_{i=1}^{10} i^2 = (2-22) \sum_{i=1}^{10} i^2 -$$

$$3 = \left( \sum_{i=1}^6 i^2 - \sum_{i=1}^{22} i^2 \right) 3 =$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 + 22 \sum_{i=1}^{10} i^2 -$$

$$760 = \left[ \frac{(1+6)6}{2} - \frac{(1+22)22}{2} \right]$$

$$\frac{(1+10)10}{2} \times 2 - 10 \times 22 =$$

$$10 = \frac{(1+0)0}{2} \times 2 + 0 \times 22 -$$

مجموع 20 حدًا الأولى من المتتابعة  $(2-3) \sum_{i=1}^{20} i^2 = (2-3) \sum_{i=1}^{20} i^2$

$$570 = \frac{(1+20)20}{2} \times 2 - 3 \times 20 =$$



## التعريف

الفرق بين كل حد عن الحد السابق له مباشرة

يساوى مقدار ثابت أى أن :  $u_n - u_{n-1} = r$

$$r = \frac{u_n - u_{n-1}}{u_{n-1}}$$

حيث  $r$  مقدار ثابت يسمى أساس المتتابعة.

حيث  $r$  مقدار ثابت يسمى أساس المتتابعة.

## الصورة العامة

إذا كان الحد الأول  $u_1$  ، الأساس  $r$

إذا كان الحد الأول  $u_1$  ، الأساس  $r$

، الحد الأخير  $u_n$  فإن :

، الحد الأخير  $u_n$  فإن :

$$(u_1, u_2, u_3, \dots) = (u_1, u_1 r, u_1 r^2, \dots)$$

$$(u_1, u_2, u_3, \dots) = (u_1, u_1 + r, u_1 + 2r, \dots)$$

$$\left( u_1, \frac{u_1}{r}, \frac{u_1}{r^2}, \dots \right)$$

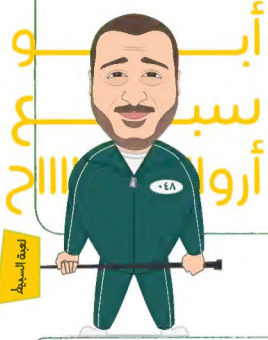
$$(u_1, u_1 + r, u_1 + 2r, \dots)$$

## الحد العام

$$u_n = u_1 r^{n-1}$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

الدرجة الأولى فى  $r$  ومعامل  $r$  وهو أساس المتتابعة



هندسية

مثال

فى المتتابعة الهندسية : (27, 9, 3, 1, ...)

أوجد : (1) قيمة  $r$ .

(2) رتبة الحد الذى قيمته  $\frac{1}{243}$

الحل

$$27 = u_1, r = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{243} = u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times 27$$

$$\frac{1}{243} = u_n \text{ بفرض } r = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{243} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times 27$$

$$8 = 1 - r \therefore \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{6561} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \therefore$$

$$\frac{1}{243} = u_9 \therefore 9 = n$$

حسابية

مثال

فى المتتابعة الحسابية : (12, 14, 16, ...)

أوجد : (1) قيمة  $r$

(2) رتبة الحد الذى قيمته 102

الحل

$$12 = u_1, r = 2$$

$$102 = u_n = 12 + (n-1) \times 2$$

$$102 = u_n \text{ بفرض } r = 2$$

$$102 = 12 + (n-1) \times 2$$

$$90 = 2 \times (n-1)$$

$$45 = n-1$$

$$102 = u_{46} \therefore$$



## مثال

حسابية

بين إذا كانت المتتابة حسابية أم لا وأوجد أساس المتتابة الحسابية :

$$(1) (u_4 - u_3) = (u_2 - u_1)$$

$$(2) (u_5 + u_2) = (u_4 + u_1)$$

## الحل

$$(1) u_4 - u_3 = u_2 - u_1$$

$$[3 - u_4] - [3 - (1 + u)] =$$

$$4 = 3 + u_4 - 3 - 1 + u =$$

∴ المتتابة حسابية والأساس = 4

$$(2) [u_5 + u_2] - [u_4 + u_1] = u_5 - u_4 + u_2 - u_1$$

$$5 - u_5 - 5 + 1 + u_2 + u_1 =$$

$$1 + u_2 =$$

∴ المتتابة ليست حسابية.

## مثال

هندسية

بين أن المتتابة  $(u_n)$  هي متتابة هندسية ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته 768

## الحل

$$u_2 = \frac{1 + u_2 \times \frac{2}{8}}{u_2 \times \frac{2}{8}} = \frac{1 + u_2}{u_2}$$

∴ المتتابة هندسية.

$$768 = u_n$$

$$768 = u_2 \times \frac{2}{8} \therefore$$

$$112 = 2.048 = \frac{1}{3} \times 768 = u_2 \therefore$$

$$768 = u_{11} \therefore$$

## مثال

حسابية

أوجد الحد الأوسط في المتتابة :

$$(2, 5, 8, 11, \dots, 128)$$

## الحل

$$3 = 8 - 11 = 5 - 8 = 2 - 5 \therefore$$

∴ المتتابة حسابية فيها :  $2 = 4, 3 = 6$

$$128 = u_n$$

$$128 = 3 \times (1 - u) + 2 \therefore$$

$$43 = u \therefore \text{عدد حدود المتتابة } 43$$

$$\therefore \text{الحد الأوسط هو } u_{22} = 3 \times 21 + 2 = 65$$

ملاحظة : الحد الأوسط في المتتابة الحسابية

$$\text{التي عدد حدودها فردي} = \frac{u_1 + u_n}{2} = \frac{2 + 128}{2} = 65$$

## مثال

هندسية

أوجد عدد حدود المتتابة :

$$(6, 12, 24, 48, \dots, 3072)$$

## الحل

$$2 = \frac{48}{24} = \frac{24}{12} = \frac{12}{6} \therefore$$

∴ المتتابة هندسية فيها :  $4 = 6, 2 = 3$

$$3072 = u_n$$

$$3072 = 6 \times 2^{n-1} \therefore$$

$$512 = 2^{n-1} \therefore$$

$$9 = n - 1 \therefore n = 10$$

∴ عدد حدود المتتابة = 10 حدود



متتابة حسابية حدها الثاني خمسة أمثال حدها السادس ومجموع مربعي حديها الأول والرابع ٤٠٥ فما هي المتتابة ؟

## الحل

$$\therefore \begin{aligned} & \text{حل} \quad \text{حل} = 5 \quad \therefore \text{حل} = 5 + 4 = 9 \end{aligned}$$

$$\therefore 5 + 25 = 9 + 4 = 34$$

$$\therefore 6 - 5 = 1$$

$$\therefore \text{حل} = 5 + \text{حل} = 10$$

$$\therefore 405 = 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 + 45 + 49 + 53 + 57 + 61 + 65 + 69 + 73 + 77 + 81 + 85 + 89 + 93 + 97 + 101 + 105 + 109 + 113 + 117 + 121 + 125 + 129 + 133 + 137 + 141 + 145 + 149 + 153 + 157 + 161 + 165 + 169 + 173 + 177 + 181 + 185 + 189 + 193 + 197 + 201 + 205 + 209 + 213 + 217 + 221 + 225 + 229 + 233 + 237 + 241 + 245 + 249 + 253 + 257 + 261 + 265 + 269 + 273 + 277 + 281 + 285 + 289 + 293 + 297 + 301 + 305 + 309 + 313 + 317 + 321 + 325 + 329 + 333 + 337 + 341 + 345 + 349 + 353 + 357 + 361 + 365 + 369 + 373 + 377 + 381 + 385 + 389 + 393 + 397 + 401 + 405$$

$$\therefore 405 = 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 + 45 + 49 + 53 + 57 + 61 + 65 + 69 + 73 + 77 + 81 + 85 + 89 + 93 + 97 + 101 + 105 + 109 + 113 + 117 + 121 + 125 + 129 + 133 + 137 + 141 + 145 + 149 + 153 + 157 + 161 + 165 + 169 + 173 + 177 + 181 + 185 + 189 + 193 + 197 + 201 + 205 + 209 + 213 + 217 + 221 + 225 + 229 + 233 + 237 + 241 + 245 + 249 + 253 + 257 + 261 + 265 + 269 + 273 + 277 + 281 + 285 + 289 + 293 + 297 + 301 + 305 + 309 + 313 + 317 + 321 + 325 + 329 + 333 + 337 + 341 + 345 + 349 + 353 + 357 + 361 + 365 + 369 + 373 + 377 + 381 + 385 + 389 + 393 + 397 + 401 + 405$$

وبالتعويض من (١) :

$$\therefore 405 = 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 + 45 + 49 + 53 + 57 + 61 + 65 + 69 + 73 + 77 + 81 + 85 + 89 + 93 + 97 + 101 + 105 + 109 + 113 + 117 + 121 + 125 + 129 + 133 + 137 + 141 + 145 + 149 + 153 + 157 + 161 + 165 + 169 + 173 + 177 + 181 + 185 + 189 + 193 + 197 + 201 + 205 + 209 + 213 + 217 + 221 + 225 + 229 + 233 + 237 + 241 + 245 + 249 + 253 + 257 + 261 + 265 + 269 + 273 + 277 + 281 + 285 + 289 + 293 + 297 + 301 + 305 + 309 + 313 + 317 + 321 + 325 + 329 + 333 + 337 + 341 + 345 + 349 + 353 + 357 + 361 + 365 + 369 + 373 + 377 + 381 + 385 + 389 + 393 + 397 + 401 + 405$$

$$\therefore 405 = 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 + 45 + 49 + 53 + 57 + 61 + 65 + 69 + 73 + 77 + 81 + 85 + 89 + 93 + 97 + 101 + 105 + 109 + 113 + 117 + 121 + 125 + 129 + 133 + 137 + 141 + 145 + 149 + 153 + 157 + 161 + 165 + 169 + 173 + 177 + 181 + 185 + 189 + 193 + 197 + 201 + 205 + 209 + 213 + 217 + 221 + 225 + 229 + 233 + 237 + 241 + 245 + 249 + 253 + 257 + 261 + 265 + 269 + 273 + 277 + 281 + 285 + 289 + 293 + 297 + 301 + 305 + 309 + 313 + 317 + 321 + 325 + 329 + 333 + 337 + 341 + 345 + 349 + 353 + 357 + 361 + 365 + 369 + 373 + 377 + 381 + 385 + 389 + 393 + 397 + 401 + 405$$

$$\therefore 9 = 5$$

$$\therefore 2 = 5 \text{ ومنها } 18 = 5$$

وتكون المتتابة : (١٨ ، ١٥ ، ١٢ ، ...)

$$\therefore 3 = 5 \text{ ومنها } 18 = 5$$

وتكون المتتابة : (١٨ ، ١٥ ، ١٢ ، ...)

متتابة هندسية مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٣ ومجموع مربعيهما يساوي ٥ أوجد المتتابة ؟

## الحل

$$\therefore \text{حل} = 1 \quad \therefore \text{حل} = 2$$

$$(1) \quad \therefore 3 = 1 + 2$$

$$\therefore 5 = 1^2 + 2^2$$

$$\therefore 5 = 1 + 4$$

$$(2) \quad \therefore 5 = 1 + 4$$

بتربيع المعادلة (١) :

$$(3) \quad \therefore 9 = 1 + 4$$

بقسمة (٢) على (٣) :

$$\therefore \frac{5}{9} = \frac{1 + 4}{1 + 4}$$

$$\therefore 5 + 9 = 1 + 4$$

$$\therefore 14 = 5$$

$$\therefore 2 = 5$$

$$\therefore 0 = (2 - 1)(1 - 2)$$

$$\therefore 3 = \left(\frac{1}{2} + 1\right) 2 \text{ ومنها } \frac{1}{2} = 2$$

$$\therefore 2 = 2$$

وتكون المتتابة : (٢ ، ١ ،  $\frac{1}{2}$  ، ...)

$$\therefore 3 = 2 + 1 \text{ ومنها } 2 = 2 + 1$$

$$\therefore 1 = 2$$

وتكون المتتابة : (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

∴ يوجد متتابتان.



### في كل من المتتابعة الحسابية والهندسية

• لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من  $s$

$$\text{نضع } ع_r < s$$

• لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أقل من  $s$

$$\text{نضع } ع_r > s$$

### في المتتابعة الحسابية

• لإيجاد رتبة أول حد موجب أو آخر حد موجب  
نضع  $ع_r < \text{صفر}$

• لإيجاد أول حد سالب أو آخر حد سالب نضع  
 $ع_r > \text{صفر}$

### مثال

### حسابية

في المتتابعة الحسابية :

$$(-42, -39, -36, \dots, 21)$$

① أوجد رتبة أول حد موجب.

② هل يوجد حد قيمته  $-11$  ؟

③  $ع_4$  من النهاية

### الحل

$$① \quad -42 = 1 - 3, \quad -39 = 2 - 3, \quad \dots, \quad \text{نضع } ع_r < \text{صفر}$$

$$\therefore -42 = 3 \times (1 - r) + 42 < \text{صفر}$$

$$\therefore -42 < 3 \times (1 - r)$$

$$\therefore -14 < (1 - r) \therefore 15 < r$$

$\therefore ع_{16}$  هو أول حد موجب.

$$② \quad \text{نضع } ع_r = -11$$

$$\therefore -11 = 3 \times (1 - r) + 42$$

$$\therefore -53 = 3 \times (1 - r)$$

$$\therefore -11 = 1 - r \quad \text{ص}^+$$

$\therefore$  لا يوجد حد قيمته  $-11$

$$③ \quad \text{لإيجاد } ع_4 \text{ من النهاية نضع } 4 = 1 - 3, \quad 21 = 3 - 3$$

$$\therefore ع_4 \text{ من النهاية } = 21 = 3 - 3 \times 8 + 21$$

### مثال

### هندسية

في المتتابعة الهندسية :

$$(1.24, 0.512, 0.256, \dots)$$

أوجد رتبة أول حد قيمته أصغر من  $0.1$

### الحل

$$1.24 = 2, \quad 0.256 = \frac{1}{4} \therefore$$

$$\therefore \text{نضع } ع_r > 0.1$$

$$\therefore 1.24 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{r-1} > 0.1$$

$$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^{r-1} > \frac{0.1}{1.24} \quad (\text{بأخذ لوغاريتم الطرفين})$$

$$\therefore (1 - r) \log \frac{1}{4} > \log \frac{0.1}{1.24}$$

(وبالقسمة على  $\log \frac{1}{4}$  وهو عدد سالب)

$$\therefore (1 - r) < \log \frac{0.1}{1.24} \div \log \frac{1}{4}$$

$$\therefore r < 1 + \left(\log \frac{0.1}{1.24} \div \log \frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore ع_{10} \text{ هو أول حد قيمته أقل من } 0.1$$



### الوسط الهندسي

- الوسط الهندسي لقيمتين لهما نفس الإشارة  
 $a, b$  هو  $\pm \sqrt{ab}$
- الوسط الهندسي لعدة قيم موجبة عددها « $n$ »  
هو الجذر النوني لموجب حاصل ضربهم
- إذا كان :  $a, b, c$  في تتابع هندسي فإن :  
 $b = \pm \sqrt{ac}$  ،  $a, c = \pm b^2$

### الوسط الحسابي

- الوسط الحسابي لقيمتين  $a, b = \frac{a+b}{2}$
- الوسط الحسابي لعدة قيم عددها « $n$ »  
مجموع هذه القيم  
 $= \frac{\quad}{n}$
- إذا كان  $a, b, c$  في تتابع حسابي فإن  $b$   
هو الوسط الحسابي بين  $a, c$  أي  
 $b = \frac{a+c}{2}$  ،  $a, c = 2b - b$



### ملاحظات

- الوسط الحسابي لقيمتين موجبتين  $\leq$  الوسط الهندسي لهما
- الوسط الحسابي لقيمتين موجبتين مختلفتين  $<$  الوسط الهندسي لهما
- لإدخال عدد  $n$  وسط حسابي أو هندسي بين قيمتين  $a, b$  فإننا نكون متتابعة حسابية أو هندسية  
يكون فيها الحد الأول  $a = 1$  ، عدد الحدود  $= n+2$  والحد الأخير  $b = l$   
 $l = a + n \cdot r$  ،  $r = \frac{l-a}{n}$
- الوسط الذي ترتيبه  $n = r + 1$  فمثلاً الوسط الخامس  $= r + 4$

### هندسي

### مثال

أدخل ستة أوساط هندسية بين  $\frac{1}{4}$  ، ٣٢

### الحل

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} = a, l = 32, n = 6 \quad \therefore \text{عدد الأوساط} = 6 \\ \therefore \text{عدد الحدود} = 2 + 6 = 8 \\ \therefore r = \frac{l-a}{n} = \frac{32 - \frac{1}{4}}{6} = \frac{127}{24} \\ \therefore \text{الأوساط هي: } \frac{1}{4}, 2, 8, 32, 128, 512, 2048 \end{aligned}$$

### حسابي

### مثال

أدخل ٢٨ وسطاً حسابياً بين ٤ ، ٩١ ثم اكتب المتتابعة الناتجة وأوجد الوسط العاشر

### الحل

$$\begin{aligned} a = 4, l = 91, n = 28 \quad \therefore \text{عدد الأوساط} = 28 \\ \therefore \text{عدد الحدود} = 2 + 28 = 30 \\ \therefore r = \frac{l-a}{n} = \frac{91-4}{28} = \frac{87}{28} \\ \therefore \text{المتتابعة الناتجة: } (4, 10, 16, \dots, 91) \\ \therefore \text{الوسط العاشر} = a + (10-1)r = 4 + 9 \cdot \frac{87}{28} = \frac{805}{28} \end{aligned}$$



إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ٣ ، ٣٥ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين هي ٣ : ١٦ فما عدد تلك الأوساط.

## الحل

عند إدخال عدة أوساط حسابية بين ٣ ، ٣٥ نحصل على المتتابعة :

$$(٣ ، ٣ + ٥ ، ٥ + ٥ ، ... ، ٥٢ + ٥ ، ٥٢ - ٣٥ ، ٣٥ - ٥ ، ٥ - ٣٥ ، ٣٥)$$

$$\therefore \frac{٣}{١٦} = \frac{٥٢ + ٥ + ٥ + ٥}{٥٢ - ٣٥ + ٥٢ - ٣٥}$$

$$\therefore \frac{٣}{١٦} = \frac{٥٣ + ٦}{٥٣ - ٧}$$

$$\therefore ٩٦ + ٤٨ = ٥٤٨ - ٢١٠$$

$$\therefore ١١٤ = ٥٧ - ٢$$

وبفرض عدد الأوساط  $n$

$$\therefore \text{الحد الأخير ل} = ٥ + n$$

$$\therefore ٣ + ٢ \times (١ + n) = ٣٥$$

$$\therefore ١٥ = n$$

إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٨١ ،  $\frac{1}{٧٢٩}$  كان مجموع الوسطين الأولين ٣٦ أوجد عدد هذه الأوساط الهندسية.

## الحل

بفرض عدد الأوساط  $n$

$$\therefore ٨١ = ١ + n ، ٥ + n = \frac{1}{٧٢٩}$$

$$، \text{مجموع الوسطين الأولين} = ٣٦$$

$$\therefore ٣٦ = ١ + ٣$$

$$\therefore ٣٦ = ٨١ + ١$$

$$\therefore ٩ + ٩ = ٤ - ١$$

$$\therefore (٣ + ١) (٤ - ١) = ٠$$

$$\therefore ٣ - ٤ = - \frac{٤}{٣} \text{ (مرفوض لأن الحد الأخير } \frac{1}{٧٢٩}$$

أصغر من الحد الأول ٨١)

$$١ = ٣$$

$$\therefore ٥ + n = \frac{1}{٧٢٩}$$

$$\therefore \frac{1}{٧٢٩} = ١ + n \left( \frac{1}{٣} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{٨١ \times ٧٢٩} = ١ + n \left( \frac{1}{٣} \right)$$

«وبأخذ لوغاريتم للأساس  $\frac{1}{٣}$  للطرفين»

$$\therefore ١٠ = ١ + n$$

$$\therefore ٩ = n$$

$$\therefore \text{عدد الأوساط} = ٩$$



## مثال

عدنان موجبان وسطهما الهندسي ٢٠ ووسطهما الحسابي يزيد عن وسطهما الهندسي بمقدار ٥ أوجد العددين :

### الحل

بفرض العددين  $a, b$

$\therefore$  الوسط الهندسي لهما  $= 20$

$$\therefore a \cdot b = (20)^2 = 400 \quad (1)$$

$\therefore$  وسطهما الحسابي  $= 25$

$$\therefore a + b = 25 \times 2 = 50 \quad (2)$$

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

$\therefore$  العددين هما : ١٠ ، ٤٠

## مثال

إذا كان : ٢٦ ، ٣ ، ٢ ، ٢ ، كميات موجبة في تتابع حسابي أثبت أن :  $b < 2a$

### الحل

$\therefore$  الوسط الحسابي لعددين موجبين مختلفين  $<$  وسطهما الهندسي

$\therefore 3$  وسط حسابي بين ٢٦ ، ٢

$$\therefore 3 < \sqrt{2 \cdot 26}$$

$$\therefore 9 < 2 \cdot 26 \quad (1)$$

$\therefore 2$  وسط حسابي بين ٣ ، ٢٦

$$\therefore 2 < \sqrt{6 \cdot 26} \quad (2)$$

من (١) ، (٢) :  $\therefore 36 < 2 \cdot 26 < 2 \cdot 72$

$\therefore$  الكميات موجبة.  $\therefore b < 2a$

## المتسلسلة الحسابية

هي مجموع حدود متتابعة حسابية حدها الأول  $a$  ، أساسها  $r$  ، حدها الأخير  $l$  ، عدد حدودها  $n$

### أي أن :

$$ح_n = a + (a + r) + (a + 2r) + \dots$$

$$+ (l - r) + l$$

$$ح_n = \sum_{i=1}^n [a + (i-1)r] = \frac{n}{2} [2a + (n-1)r]$$

$$ح_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)r]$$

$$ح_n = \frac{n}{2} (a + l)$$

## المتسلسلة الهندسية

هي مجموع حدود متتابعة هندسية حدها الأول  $a$  ، أساسها  $r \neq 1$  ، حدها الأخير  $l$  وعدد حدودها  $n$

### أي أن :

$$ح_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$ح_n = \sum_{i=1}^n ar^{i-1} = a \sum_{i=1}^n r^{i-1}$$

$$ح_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$ح_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

في حالة  $|r| > 1$  يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائي من حدود المتتابعة الهندسية حيث :

$$ح_\infty = \frac{a}{1 - r}$$



$$* \text{ع} = \text{ح} - \text{ح} - \text{ح} \text{ حيث } \text{ح} < 1$$

\* أكبر مجموع للمتتابعة الهندسية التقاربية = ح

\* لتحويل العدد العشري الدائر ٣, ٢٤ إلى كسر

اعتيادي نكتبه على صورة متسلسلة هندسية كالتالي :

$$\begin{aligned} 3,24 &= 3 + 0,24 + 0,0024 + \dots \\ 0,24 &= \dots + 0,000024 + \dots \\ \frac{0,24}{0,99} + 3 &= \dots \\ 3,24 &= \frac{30}{33} \end{aligned}$$

$$* \text{ع} = \text{ح} - \text{ح} - \text{ح} \text{ حيث } \text{ح} < 1$$

\* أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية

= مجموع الحدود الموجبة فقط.

\* أصغر مجموع للمتتابعة الحسابية

= مجموع الحدود السالبة فقط.

\* لإيجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع

موجب نضع ح < صفر

\* لإيجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع

سالبا نضع ح > صفر

## مثال

كم حداً يجب أخذه من حدود المتتابعة الهندسية (٢، ٦، ١٨، ....) ابتداءً من حها الأول حتى يكون المجموع ٦٥٦٠ ؟

## الحل

$$\therefore 2 = 4 = 8 = 16 = \dots$$

وبفرض ح = ٦٥٦٠

$$\therefore 6560 = \frac{(1 - 2^n) 2}{1 - 2}$$

$$\therefore 6560 = 1 - 2^n$$

$$\therefore 2^n = 6561 = 2^8$$

$$\therefore \text{عدد الحدود} = 8 \quad \therefore \text{ح} = 8$$

## مثال

متتابعة حسابية حها النوني ع = ٣ - ٢٠  
أوجد عدد الحدود اللازم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٦٠

## الحل

(ع) متتابعة حسابية حها الأول

$$4 = \text{ع} = 3 - 20 = 17- \text{الأساس} = 3$$

وبفرض ح = ٦٠

$$\therefore 60 = \left[ 3 \times (1 - 2) + (17 - 2) \right] \frac{2}{2}$$

$$\therefore 120 = (3 - 2 + 34 - 2) 2$$

$$\therefore 120 = (37 - 2) 2$$

$$\therefore 120 = 37 - 2$$

$$\therefore 120 = (8 + 2) (15 - 2)$$

$$\therefore 15 = \text{ح} = 15 \text{ (مرفوض) } \therefore \text{ح} = 15$$

$$\therefore \text{عدد الحدود} = 15$$



## مثال

أوجد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١ ، ١٠٠ والتي كل منها لا يقبل القسمة على ٥

### الحل

الأعداد الصحيحة بين ١ ، ١٠٠ هي :

٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ٩٩ ، وعددهم ٩٨

$$\therefore \text{مجموعهم} = \frac{98}{2} [99 + 2] = 4949 \quad (1)$$

، الأعداد التي تقبل القسمة على ٥ هي :

٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ... ، ٩٥ ، وهى حدود متتابعة

حسابية فيها ٩ = ٥ ، ٥ = ٥ ، ٥ = ٥

$$\therefore 95 = 5 \times (1 - r) + 5$$

$$\therefore 19 = r$$

$\therefore$  مجموع الأعداد التي تقبل القسمة على ٥

$$(2) \quad 950 = (95 + 5) \frac{19}{2} =$$

من (١) ، (٢) :

$\therefore$  مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين

١ ، ١٠٠ والتي لا تقبل القسمة على ٥

$$3999 = 950 - 4949 =$$

## مثال

أوجد مجموع المتسلسلة :

$$(1) \quad \sum_{r=0}^{11} 16 \left(\frac{3}{4}\right)^r - 1$$

$$(2) \quad \sum_{r=1}^{\infty} 56 \left(\frac{3}{4}\right)^r - 1$$

### الحل

(١) المطلوب مجموع متتابعة هندسية حدها الأول

١٦ وأساسها  $\frac{3}{4}$  بدءاً من الحد الخامس إلى

الحادى عشر وهو يساوى ١١ - ح

$$\frac{\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{11}\right) 16}{1 - \frac{3}{4}} - \frac{\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^1\right) 16}{1 - \frac{3}{4}} =$$

$$= 26.05 \frac{59}{64}$$

(٢) المطلوب مجموع متتابعة هندسية حدها

الأول ٥٦ وأساسها  $\frac{3}{4}$  إلى  $\infty$  من الحدود

$$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} 56 \left(\frac{3}{4}\right)^r - 1 = \frac{56}{\frac{3}{4} - 1} = 224$$

## مثال

متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية ، مجموع حديها

الأول والثانى = ٩ أوجد المتتابعة

### الحل

المتتابعة هى : (٢ ، ٢ر ، ٢ر٢ ، ...)

$$2 + 2r = 9 \therefore r = \frac{7}{2}$$

$$2 + 2 \times \frac{7}{2} = 9$$

$\therefore$  المتتابعة هى : (٢ ، ٣ ، ٦ ، ٣ ، ٢ ، ٢ ، ...)

$$\therefore r - 1 = r$$

$$\therefore 9 = \left(\frac{1}{r} + 1\right) 2$$

$$\therefore 6 = 2$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}$$



## مثال

أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة الهندسية (٢٥ ، ٢٢ ، ١٩ ، ....) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالباً.

### الحل

بوضع  $r > 0$

$$\therefore \frac{r}{2} [2 + (25 - r) \times (1 - r)] > 0$$

$$\therefore 2 + (25 - r) \times (1 - r) > 0$$

$$\therefore 2 + 25 - r - 25r + r^2 > 0$$

$\therefore$  أصغر عدد من الحدود بحيث يكون المجموع سالب هو ١٨ حد.

## مثال

متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثالث يساوي ٢٠ ، مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها يساوي ٢٦ ، بين أن هناك متابعتين تحققان ذلك وأنه يمكن جمع عدد غير منته من حدود إحداهما ثم أوجد ذلك المجموع ابتداءً من الحد الأول.

### الحل

$$\therefore 2 + 2r = 20$$

$$(1) \quad \therefore 2 + 2r + 2r^2 = 26$$

$$2 + 2r + 2r^2 = 26$$

$$(2) \quad \therefore 2 + 2r + 2r^2 = 26$$

بقسمة (١) على (٢) :

$$\therefore \frac{2r + 2r^2}{2} = \frac{24}{2}$$

$$\therefore 2r + 2r^2 = 24$$

$$\therefore 2r^2 + 2r - 24 = 0$$

$$\therefore 2r^2 + 2r - 24 = 0$$

$$\therefore r = 3 \text{ ومن (١)}$$

$$\therefore 2 = 2r + 2r^2 : \text{ المتتابعة هي : } (2, 6, 18, \dots)$$

$$أ، r = \frac{1}{3} \text{ ومن (١) : } \therefore 2 + 2r = 20$$

$$\therefore 2 + 2r + 2r^2 = 26 : \text{ المتتابعة هي : } (2, 6, 18, \dots)$$

أي أنه يوجد متابعتان

$$\therefore \text{ المتتابعة الثانية فيها } r = \frac{1}{3}$$

$\therefore$  يمكن جمع عدد غير منته من حدودها حيث

$$S_{\infty} = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3$$

## مثال

متتابعة حسابية مجموع العشرين حداً الأولى منها ١٩٠ ، مجموع العشرة حدود التالية لها ٣٩٥ أوجد المتتابعة

### الحل

$$\therefore \text{ ح. الأولى } = 190$$

$$\therefore \frac{20}{2} [2 + 19a] = 190$$

$$(1) \quad \therefore 2 + 19a = 19$$

$$\therefore \text{ مجموع العشرة حدود التالية } = 395$$

$$\therefore \frac{10}{2} [2 + 9a] = 395$$

$$\therefore 2 + 9a = 79$$

$$(2) \quad \therefore 2 + 9a = 79$$

$$\text{وبطرح (١) من (٢) : } \therefore 7a = 77$$

$$\therefore a = 11$$

$$\therefore \text{ المتتابعة هي : } (2, 13, 24, 35, 46, 57, 68, 79, 90, 101, \dots)$$



### مثال

متتابة حسابية حدها الأول ٢٩ وحدها الثاني خمسة أمثال حدها السابع أوجد المتتابة ثم أوجد أكبر مجموع ممكن لعدد من حدودها.

### الحل

$$\therefore 29 = a_1, \quad a_5 = 5a_1$$

$$\therefore 5 = a_1 + 4d \quad \therefore 5 = a_1 + 4(5a_1 - a_1) \quad \therefore 5 = a_1 + 16a_1$$

$$\therefore 5 = 17a_1 \quad \therefore a_1 = \frac{5}{17}$$

$\therefore$  المتتابة هي : (٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ ، ...)

المجموع يكون أكبر ما يمكن عند أخذ كل الحدود الموجبة فقط

$$\therefore a_n < 0$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d < 0$$

$$\therefore 29 - 4(n-1) < 0$$

$$\therefore \frac{33}{4} > n \quad \therefore n = 1, 2, 3, \dots$$

$\therefore$  أكبر مجموع = ح

$$= \frac{1}{2} [29 \times 2 + (-4) \times 1 \times 1] = 120$$

### مثال

متتابة هندسية غير منتهية مجموع حدودها إلى  $\infty$  يساوى ١٨ ومجموع مربعات تلك الحدود إلى  $\infty$  يساوى ١٠٨ أوجد المتتابة.

### الحل

$$(1) \quad \therefore \frac{a_1}{1-r} = 18 \quad \therefore a_1 = 18(1-r)$$

$\therefore$  مجموع مربعات حدودها إلى  $\infty$  هو

مجموع حدود متتابة هندسية حدها

الأول  $a_1$  والأساس  $r$

$$(2) \quad \therefore \frac{a_1^2}{1-r^2} = 108$$

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

$$\therefore \frac{108}{1-r^2} = \frac{18^2(1-r)^2}{(1-r)^2(1+r)} \quad \therefore \frac{1}{3} = \frac{1-r}{1+r}$$

$$\therefore 1-r = \frac{1}{3}(1+r) \quad \therefore 3(1-r) = 1+r$$

$$\therefore \frac{1}{4} = r$$

وبالتعويض فى (١) :  $\therefore a_1 = 18(1-\frac{1}{4}) = 9$

$\therefore$  المتتابة هي : (٩ ،  $\frac{9}{4}$  ،  $\frac{9}{16}$  ، ...)

### مثال

إذا كان مجموع  $n$  حداً الأولى من متتابة هندسية يعطى بالقانون  $128 - 72n - n^2$  فأوجد المتتابة ثم أوجد أكبر مجموع لحدودها.

### الحل

$$\therefore \text{ح} = 128 - 72n - n^2$$

$$\therefore \text{ح} = 128 - 72 - 1 = 64$$

$$\therefore \text{ح} = 128 - 72 - 4 = 96$$

$$\therefore \text{ح} = 128 - 72 - 9 = 96$$

$\therefore$  المتتابة هي : (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)

$$\therefore r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{أكبر مجموع لحدودها} = \text{ح} = \frac{64}{1 - \frac{1}{2}} = 128$$



## مضروب العدد

• مضروب العدد  $n = \underline{n} = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

فمثلاً :  $5 = \underline{5} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

•  $\underline{n} = n(n-1) \dots$  فمثلاً :  $5 = \underline{5} = 5 \times 4$

•  $\underline{n}$  يقبل القسمة على  $m$  إذا كان :  $m \geq n$

•  $\underline{1} = 1$  ، إذا كان :  $\underline{n} = 1$  فإن :  $n = \text{صفر}$  ،  $n = 1$

## الباديل

•  $\underline{n}^r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$  فمثلاً :  $7 \times 6 \times 5 = \underline{7}^3$

•  $\frac{\underline{n}}{\underline{r}} = \underline{n}^r$  فمثلاً :  $\frac{5}{3} = \underline{5}^3 = 20$

•  $\underline{n}^r = 1$  ، إذا كان :  $\underline{n}^r = 1$  ،  $n \neq r$  فإن :  $r = \text{صفر}$

•  $\underline{n}^r = \underline{n}$  فمثلاً :  $\underline{3}^2 = 6$

## التوافيق

•  $\frac{\underline{n}}{\underline{r}} = \underline{n}^r$  فمثلاً :  $\frac{5}{3} = \underline{5}^3 = 20$

•  $\underline{n}^r = \underline{n}^r$  فمثلاً :  $7 = \underline{7}^1 = \underline{7}^1$

•  $\underline{n}^r = \underline{n}^r$  ،  $1 = \underline{n}^r$  ،  $n = \underline{n}^r$

• إذا كان :  $\underline{n}^r = \underline{n}^r$  فإن :  $n = r$  ،  $n = r + 1$  ،  $n = r$

•  $\underline{n}^r = \underline{n}^r + \dots + \underline{n}^r + \underline{n}^r + \underline{n}^r + \underline{n}^r + \underline{n}^r$





## ملاحظات

- ①  $ل^{\nu} \exists ص^+$  ،  $ق^{\nu} \exists ص^+$  ،  $ر \exists ط$  بحيث  $ر \geq \nu$
- ② لا معنى للحديث عن  $ل^{\nu} ق^{\nu}$  ،  $ق^{\nu} ل^{\nu}$  ،  $ل^{\nu} ل^{\nu}$  ،  $ق^{\nu} ق^{\nu}$  ،  $ل^{\nu} ل^{\nu}$  ،  $ق^{\nu} ل^{\nu}$  ،  $ل^{\nu} ق^{\nu}$  ،  $ق^{\nu} ق^{\nu}$  ، وهكذا ....
- ③ التبديل يكون بدون تكرار مع مراعاة الترتيب أما التوفيق فهو بدون تكرار أيضاً لكن مع عدم مراعاة الترتيب.

④ • عدد كل القطع المستقيمة الواصلة بين رؤوس مضلع محدب به  $\nu$  ضلع  $ق^{\nu}$

• عدد أقطار المضلع المحدب الذي به  $\nu$  ضلع  $ق^{\nu} - \nu = \frac{\nu(\nu-3)}{2}$

$$٥ = ٥ - ق^٥$$

أو

$$٥ = \frac{(٣ - ٥) ٥}{٢}$$

فمثلاً عدد أقطار المضلع الخماسي

## ترتيب $\nu$ من الأشياء المتميزة

في  
دائرة



فإن

عدد طرق الترتيب  $= |٧ - ١|$

فمثلاً

عدد طرق ترتيب ٧ طلاب في دائرة

$$٧٢٠ = |٧| =$$

في  
صف



فإن

عدد طرق الترتيب  $= |٧|$

فمثلاً

عدد طرق ترتيب ٧ طلاب في صف

$$٥٠٤٠ = |٧| =$$



### مثال

إذا كان :  $120 = 4 - n$  أوجد قيمة :  $n$

### الحل

$$5 = 120 = 4 - n \therefore$$

$$9 = n \therefore \quad 5 = 4 - n \therefore$$

### مثال

إذا كان :  $12 = 1 - 2n$  أوجد قيمة :  $n$

### الحل

$$12 = 1 - 2n \therefore$$

$$4 = 24 = 2n \therefore \quad 24 = 1 - 2n \therefore$$

$$2 = n \therefore \quad 4 = 2n \therefore$$

### مثال

إذا كان :  $30 = 1 + n$  أوجد قيمة :  $n$

### الحل

$$1 - n \quad 30 = 1 + n \therefore$$

$$1 - n \quad 30 = 1 - n \quad n(1 + n) \therefore$$

$$6 \times 5 = 30 = (1 + n)n \therefore$$

$$5 = n \therefore$$

### مثال

$$\frac{56}{2+n} = \frac{2}{1+n} + \frac{1}{n}$$

### الحل

$$\frac{56}{2+n} = \frac{n(2+1+n)}{(1+n)n}$$

$$\frac{56}{1+n(2+n)} = \frac{(2+(1+n))n}{1+n} \therefore$$

$$\frac{56}{2+n} = 3+n \therefore$$

$$5 = n \therefore \quad 7 \times 8 = (2+n)(3+n) \therefore$$

### مثال

إذا كان :  $90 = 3^L$  أوجد قيمة :  $n$

### الحل

$$90 = \frac{n}{3-n} \therefore \quad 90 = 3^L \therefore$$

$$90 = \frac{(3-n)(2-n)(1-n)n}{3-n} \therefore$$

$$9 \times 10 = 90 = (2-n)(1-n) \therefore$$

$$11 = n \therefore$$

### مثال

إذا كان :  $60 = 1 + n$  أوجد قيمة :  $n$

### الحل

$$3^L = 60 = 1 + n \therefore$$

$$2 = n \therefore \quad 3 = 1 + n \therefore$$



### مثال

إذا كان :  $٢ \times ٦^{\text{ل}} = ١ - \text{ل}$  أوجد :  $\text{ل}$

### الحل

$$\frac{٦}{١ + \text{ل} - ٦} \times ٢ = \frac{١}{\text{ل} - ٥}$$

$$\therefore \frac{٦}{(١ + \text{ل} - ٦)} \times ٢ = \frac{١}{\text{ل} - ٥}$$

$$\therefore ٣ \times ٤ = ١٢ = (\text{ل} - ٦)(\text{ل} - ٧)$$

$$\therefore \text{ل} = ٣$$

### مثال

إذا كان :

$$١٠^{\text{ل}} = ١٤^{\text{ل}} \text{ أوجد } ٢٥^{\text{ل}}$$

### الحل

$$٢٤ = ١٤ + ١٠ = \text{ل}$$

$$\therefore ٢٥^{\text{ل}} = ٢٤^{\text{ل}} = ٢٤^{\text{ل}} = ٢٤^{\text{ل}}$$

م  
ل  
د  
و

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

ل

### مثال

إذا كان :

$$١٢٠ = ٧ - \text{ل} \text{ أوجد قيمة } ١ - \text{ل}$$

### الحل

$$١٢٠ = ٧ - \text{ل}$$

$$\therefore ١٢ = \text{ل} \text{ : } ٥ = ٧ - \text{ل}$$

$$\therefore \text{ل} = ٤ \text{ : } ٤ = ١ - \text{ل} = ١ - \text{ل} = ١ - \text{ل}$$

### مثال

$$١ - \text{ل} = ١ + \text{ل} \text{ : إذا كان : } ١ - \text{ل} = ١ + \text{ل}$$

أوجد :  $\text{ل}$

### الحل

$$٢ = \text{ل} \text{ : } ١ - \text{ل} = ١ + \text{ل}$$

$$\text{أ} ، ٢٥ = ١ - \text{ل} + ١ + \text{ل}$$

$$\therefore \text{ل} = ٥ \text{ : } ٢٥ = \text{ل}$$

### مثال

$$\text{إذا كان : } ١٩٠ = ٢^{\text{ل} + \text{م}} ، ٦٠ = ٣^{\text{ل} - \text{م}} \text{ أوجد : } \text{م} ، \text{ل}$$

### الحل

$$١٩٠ = \frac{٢^{\text{ل} + \text{م}}}{٢} = ٢^{\text{ل} + \text{م} - ١}$$

$$\therefore ٢^{\text{ل} + \text{م} - ١} = ٢^{\text{ل} + \text{م} - ١}$$

$$\therefore ٦٠ = ٣^{\text{ل} - \text{م}} = ٣^{\text{ل} - \text{م}}$$

$$\text{بحل (١) ، (٢) : } \text{ل} = ٩ ، \text{م} = ٢$$

$$(١) \quad ٢٠ = \text{م} + \text{ل}$$

$$(٢) \quad ٥ = \text{ل} - \text{م}$$



### مثال

إذا كان:  ${}^nL^m = {}^mC^m_{24}$  أوجد:  $m, n$

#### الحل

$$\frac{{}^nL^m}{n} = {}^mC^m_{24} = \frac{{}^nL^m}{24}$$

$$\therefore n = 24 \quad \therefore 24 = n$$

$$\therefore {}^nL^m \times 24 = {}^mC^m_{24}$$

$$\therefore \frac{m}{4} \times 24 = \frac{m}{4-m}$$

$\therefore$  وهذا يتحقق لكل قيم  $m$  الممكنة

أى أن  $m \leq 4, m \in \mathbb{N}^+$

### مثال

إذا كان:  ${}^nL^m = 720, {}^nL^m = 120$

أوجد قيمة كل من  $n, m$

#### الحل

$$\therefore \frac{{}^nL^m}{n} = {}^mC^m_{120} \quad \therefore \frac{720}{n} = 120$$

$$\therefore n = 6 \quad \therefore 3 = m$$

$$720 = {}^nL^m, \quad \therefore 720 = {}^nL^m = {}^nL^3$$

$$\therefore 10 = n \quad \therefore 3 = m$$

### مثال

أوجد قيمة:

$$① {}^0C^0_0 + {}^1C^0_1 + {}^2C^0_2 + {}^3C^0_3 + {}^4C^0_4 + {}^5C^0_5$$

$$② {}^0C^0_0 - {}^1C^0_1 + {}^2C^0_2 - {}^3C^0_3 + {}^4C^0_4 - {}^5C^0_5$$

#### الحل

$$① {}^0C^0_0 + {}^1C^0_1 + {}^2C^0_2 + {}^3C^0_3 + {}^4C^0_4 + {}^5C^0_5 = 2 = 2^0$$

$$② {}^0C^0_0 - {}^1C^0_1 + {}^2C^0_2 - {}^3C^0_3 + {}^4C^0_4 - {}^5C^0_5 = 0$$

$$\therefore {}^0C^0_0 - {}^1C^0_1 + {}^2C^0_2 - {}^3C^0_3 + {}^4C^0_4 - {}^5C^0_5 = 0$$



إجراء عملية تكوين مجموعات  
من أشياء مختلفة دون تكرار

### التوافيق

هي مجموعات يمكن تكوينها من  
مجموعة من الأشياء المختلفة  
بأخذها كلها أو بأخذ نفس العدد  
منها في كل مرة دون مراعاة  
الترتيب.

•  ${}^n C_r$  هو عدد المجموعات المختلفة  
التي يمكن تكوينها من  $n$  من الأشياء  
بحيث تحتوى كل مجموعة على  $r$   
من العناصر.

$$\frac{{}^n C_r}{{}^n C_r} = {}^n C_r$$

فمثلاً :

$$35 = \frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{{}^5 C_2}{{}^5 C_2} = {}^5 C_2$$

$$\frac{{}^n C_r}{{}^n C_r} = {}^n C_r$$

$$35 = \frac{5}{2} = {}^5 C_2 \text{ فمثلاً :}$$

### مثال

عدد طرق تكوين فريق من ثلاثة  
سباحين من بين سبعة سباحين  
 $= {}^7 C_3 = 35$  طريقة.

إجراء عملية تكوين ترتيبات  
لأشياء مختلفة دون تكرار

### التباديل

هي ترتيبات لعدة أشياء مختلفة  
بأخذها كلها أو بأخذ نفس  
العدد منها في كل مرة.

•  ${}^n P_r$  هو عدد الترتيبات المختلفة  
التي يمكن تكوينها من  $n$  من  
الأشياء بحيث تحتوى كل ترتيب  
على  $r$  من تلك الأشياء.

$$\frac{{}^n P_r}{{}^n P_r} = {}^n P_r$$

فمثلاً :

$$210 = 5 \times 4 \times 3 = {}^5 P_3$$

$$\frac{{}^n P_r}{{}^n P_r} = {}^n P_r$$

$$\frac{5}{4} = {}^5 P_3 \text{ فمثلاً :}$$

### مثال

عدد طرق ترتيب المراكز الثلاثة  
الأولى في سباق للسباحة  
اشترك به سبعة سباحين  
 $= {}^7 P_3 = 210$  طريقة.

إجراء عمليتين  
أو أكثر معاً

### مبدأ العدد

إذا كانت العملية ٢ يمكن إجراءها  
بعدد  $m$  من الطرق ، العملية ٣  
يمكن إجراءها بعدد  $n$  من الطرق  
وهكذا ... إلى العملية  $k$  التي يمكن  
إجراءها بعدد  $r$  من الطرق فإن :

• قاعدة الضرب :

عدد طرق إجراء العملية ٢ و ٣  
و ٤ و ٥ و ... و  $k$  معاً  
 $= m \times n \times r \times \dots$

• قاعدة الجمع :

عدد طرق إجراء العملية ٢ أو ٣  
أو ٤ أو ٥ أو ... أو  $k$   
 $= m + n + r + \dots$

### مثال

في متجر لبيع الملابس كان هناك  
٦ قمصان و ٨ رابطات عنق  
مختلفة فإن عدد الطرق التي  
يمكن لشخص أن يشتري بها  
① قميص و رابطة عنق

$$48 = 8 \times 6 =$$

② قميص أو رابطة عنق

$$14 = 8 + 6 =$$



مثال

من مجموعة الأرقام  $\{7, 5, 4, 3, 2\}$  بكم طريقة يمكن تكوين :

① عدد زوجي من ثلاثة أرقام.

② عدد زوجي من ثلاثة أرقام مختلفة.

الحل

نحتاج اختيار

رقم أحاد زوجي ① رقم عشرات ② رقم مئات

① عدد الطرق  $= 5 \times 5 \times 2 = 50$  عدد

② عدد الطرق  $= 3 \times 4 \times 2 = 24$  عدد

«لاحظ الاختيار للعملية المشروطة أولاً»

مثال

من مجموعة الأرقام  $\{4, 5, 6, 0\}$  بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ٣ أرقام مختلفة

الحل

نحتاج اختيار

رقم أحاد ① رقم عشرات ② رقم مئات  $\neq$  صفر

∴ عدد الطرق

طرق اختيار طرق اختيار طرق اختيار =

المئات الأحاد العشرات

٣ × ٣ × ٢

$= 18$  طريقة. «لاحظ الاختيار للعملية المشروطة أولاً»

مثال

إذا كانت :  $S = \{7, 5, 4, 3, 2\}$

فأوجد عدد عناصر كل من  $S, E$

حيث  $S = \{ (a, b) : a \in S, b \in S, a \neq b \}$

$E = \{ (a, b, c) : \{a, b, c\} \subseteq S, a \neq b \neq c \}$

الحل

$n(S) = 5 \times 4 = 20$

$n(E) = \frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 3} = 10$

مثال

من بين ٧ رجال و٥ سيدات بكم طريقة يمكن

تكوين لجنة مكونة من

① رجلين وسيدتين.

② ٤ اشخاص من نفس الجنس.

الحل

① عدد طرق اختيار رجلين من سبعة  $= {}^7P_2 = 21$

، عدد طرق اختيار سيدتين من خمسة

$= {}^5P_2 = 10$

∴ عدد طرق تكوين لجنة من رجلين

② سيدتين  $= 10 \times 21 = 210$  طريقة.

② عدد طرق اختيار ٤ رجال من ٧  $= {}^7P_4 = 35$

، عدد طرق اختيار ٤ سيدات من ٥  $= {}^5P_4 = 5$

∴ عدد طرق اختيار لجنة من ٤ أشخاص من

نفس الجنس أي ٤ رجال ① أو ٤ سيدات

$= 35 + 5 = 40$



### مثال

بكم طريقة يمكن لـ ٥ طلاب أن يجلسوا في ٧ مقاعد على شكل صف.

### الحل

$$\text{عدد الطرق} = ٧! = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٢٥٢٠ =$$

### مثال

مدرسة بها ١٠ طلاب يمارسون كرة السلة ، بكم طريقة يمكن اختيار فريق مكون من ٥ أعضاء وقائد للفريق من هؤلاء اللاعبين.

### الحل

$$\text{عدد طرق اختيار قائد} \textcircled{5} \text{ أعضاء} \\ = ١٠ \times ٩ = ٩٠$$

### مثال

بكم طريقة يمكن اختيار طالباً أو أكثر من بين ٥ طلاب.

### الحل

العملية هي اختيار طالب (أو) طالبين (أو) ثلاثة طلاب (أو) أربعة طلاب (أو) خمسة طلاب من ٥ طلاب

$$\therefore \text{عدد الطرق} = ١ + ٥ + ١٠ + ١٠ + ٥ = ٣١$$

### مثال

بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من ٥ أشخاص أن تتخذ قراراً بالأغلبية.

### الحل

قرار الأغلبية يكون بموافقة ٣ (أو) ٤ (أو) ٥ أشخاص من الخمسة

$$\therefore \text{عدد الطرق} = ١٠ + ٥ + ١ = ١٦ \text{ طريقة.}$$

## متنقفل ولا يا لالا اوع!



# ثانياً: التفاضل والتكامل وحساب المثلثات

## أولاً: التفاضل والتكامل

### معدل التغير

إذا كانت  $ص = د(س)$  وكانت  $س_1$ ،  $س_2$  قيم ثابتة في مجال الدالة وكانت  $هـ$  قيمة متغيرة بحيث  $س_1 < س_2$ ،  $هـ > 0$ ، فإن  $د(س)$  تتغير من  $د(س_1)$  إلى  $د(س_2)$ ، ومن  $س_1$  إلى  $س_2$ ،  $هـ$  فإنه يتبع ذلك تغير في قيمة الدالة ومنه نجد أن :

$$\frac{\Delta د(س) = د(س_2) - د(س_1)}{\Delta س = س_2 - س_1} = \frac{\Delta د(س)}{\Delta س}$$

متوسط التغير في الدالة

$$\Delta د(س) = د(س_2) - د(س_1)$$

مقدار التغير في الدالة

$$\frac{د(هـ) - د(س_1)}{هـ - س_1} = \frac{د(هـ) - د(س_1)}{هـ - س_1}$$

دالة متوسط التغير في الدالة عند :  $س = س_1$

$$\frac{د(هـ) - د(س_1)}{هـ - س_1} = \frac{د(هـ) - د(س_1)}{هـ - س_1}$$

دالة التغير في الدالة عند :  $س = س_1$

$$\frac{د(هـ) - د(س_1)}{هـ - س_1} = \frac{د(هـ) - د(س_1)}{هـ - س_1}$$

معدل التغير للدالة عند :  $س = س_1$

### مثال

إذا كانت :  $د(س) = س^2 - س + 1$  أوجد دالة التغير ت عند  $س = 3$  ومنها أوجد ت (2, 0)

### الحل

$$\begin{aligned} د(هـ) - د(س_1) &= د(3) - د(0) \\ &= (3^2 - 3 + 1) - (0^2 - 0 + 1) \\ &= 7 - 1 = 6 \\ د(هـ) - د(س_1) &= 6 \\ د(هـ) - د(س_1) &= 6 \end{aligned}$$

ت (2, 0) = 6 = 2(0, 2) + (0, 2) 6 = 1, 04

### مثال

إذا كانت :  $د(س) = س^2 + 2س - 1$  أوجد : مقدار التغير في د(س) عندما تتغير س من 2 إلى 8، 1

### الحل

$$\begin{aligned} \Delta د(س) &= د(8) - د(2) \\ &= (8^2 + 2 \cdot 8 - 1) - (2^2 + 2 \cdot 2 - 1) \\ &= 63 - 5 = 58 \end{aligned}$$



### مثال

إذا كانت : د (س) = س<sup>2</sup> - 3 س

أوجد دالة متوسط التغير عند س = 2

ثم أوجد م (0, 1)

### الحل

$$م (هـ) = \frac{د (2) - د (0)}{2 - 0}$$

$$= \frac{2^2 - 3(2) - (0^2 - 3(0))}{2 - 0}$$

$$= 1 + 0 = 1$$

$$\therefore م (0, 1) = 1, 1$$

### مثال

إذا كانت : د (س) = س<sup>2</sup> + 2 س - 3

أوجد متوسط التغير للدالة د عندما تزداد س بمقدار 0, 5

### الحل

$$متوسط التغير = \frac{د (س + 0, 5) - د (س)}{0, 5}$$

$$= \frac{(س + 0, 5)^2 + 2(س + 0, 5) - 3 - (س^2 + 2س - 3)}{0, 5}$$

$$= \frac{س^2 + 1س + 0, 25 + 2س + 1 - 3 - س^2 - 2س + 3}{0, 5}$$

$$= \frac{1س + 0, 25 + 1 - 3 + 3}{0, 5}$$

### مثال

إذا كانت : د (س) = س<sup>2</sup> - 2 س + 5

أوجد معدل تغير الدالة عند س = 1

ثم أوجد هذا المعدل عند س = -3

### الحل

$$م (هـ) = \frac{د (س + هـ) - د (س)}{هـ}$$

$$= \frac{1}{هـ} [ (س + هـ)^2 - 2(س + هـ) + 5 - (س^2 - 2س + 5) ]$$

$$= \frac{1}{هـ} [ س^2 + 2س + هـ^2 - 2س - 2هـ + 5 - س^2 + 2س - 5 ]$$

$$\therefore \text{معدل التغير عند س} = س = 1 = \frac{هـ^2 - 2هـ}{هـ}$$

$$= \frac{هـ(هـ - 2)}{هـ} = هـ - 2$$

$$\therefore \text{معدل التغير عند س} = -3 \text{ هو } -3 - 2 = -5$$

### مثال

إذا كان متوسط التغير في د

= 2, 4 عندما تتغير س من 3 إلى

3, 2 أوجد مقدار التغير في د

### الحل

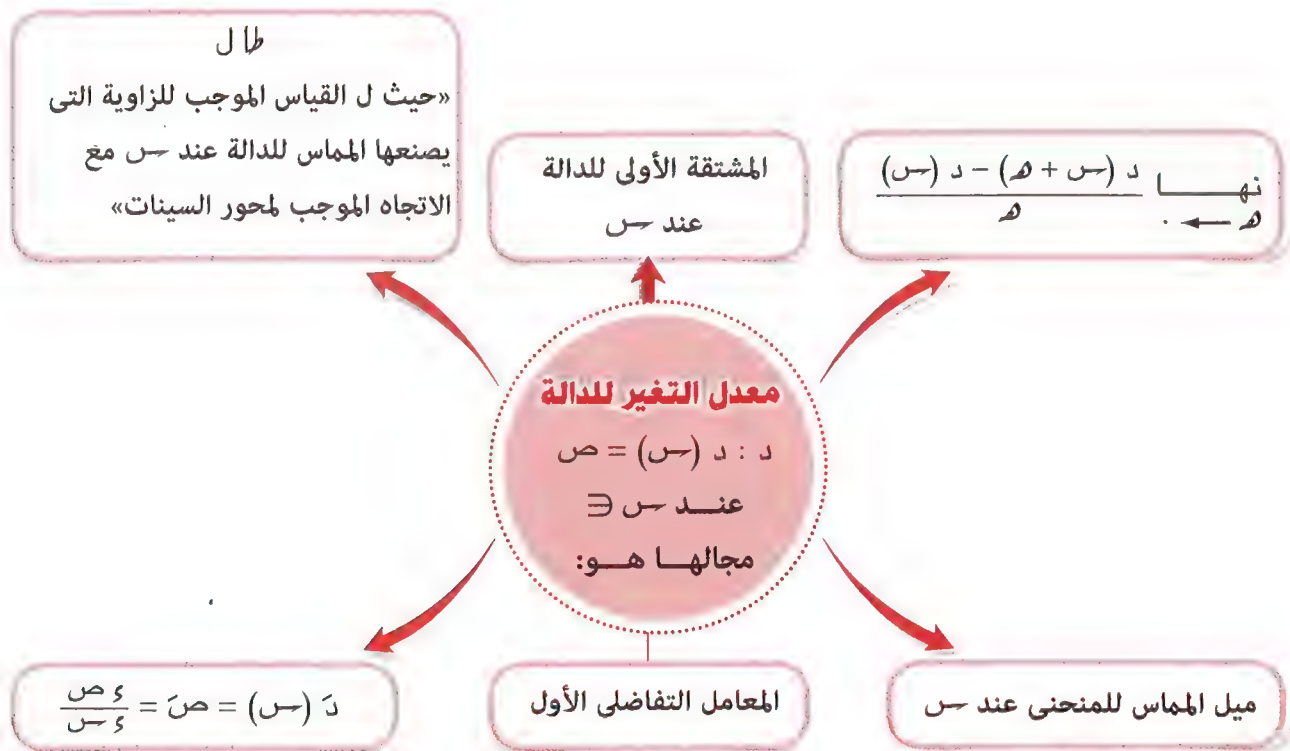
$$\therefore 2, 4 = \frac{د (3, 2) - د (3)}{3, 2 - 3}$$

$$\therefore د (3, 2) - د (3) = 0, 48$$

$\therefore$  مقدار التغير في د عندما تتغير

س من 3 إلى 3, 2 = 0, 48





### مثال

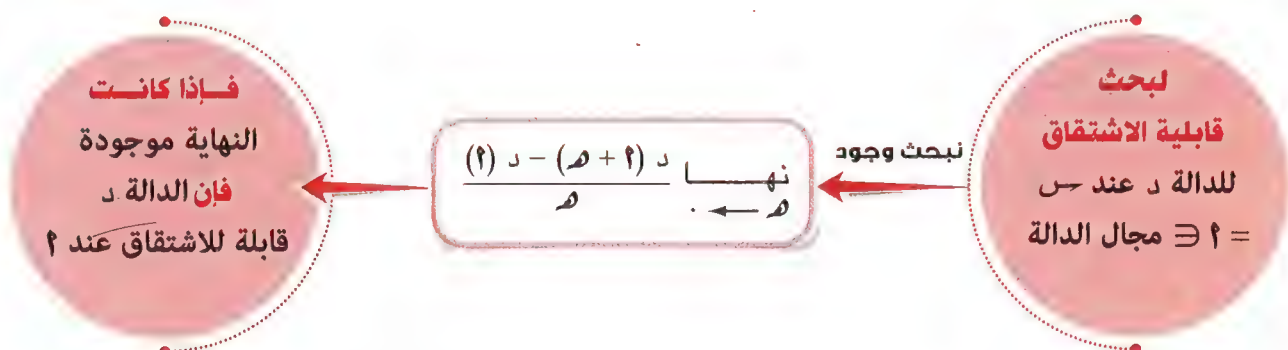
باستخدام تعريف المشتقة أوجد المشتقة الأولى للدالة  $d : d = (x) = 3x^2 - 5$  ثم أوجد ميل المماس لمنحنى  $d$  عند النقطة  $(-2, 7)$

### الحل

$$\begin{aligned} \text{المشتقة الأولى} &= \frac{d - (h + h) - d}{h} = \frac{[3 - 5] - 3 - 5}{h} = \frac{3 - 5 - 3 - 5}{h} = \frac{-10}{h} \\ &= \frac{3 - 5 - 3 - 5}{h} = \frac{-10}{h} \\ &= \frac{3 - 5 - 3 - 5}{h} = \frac{-10}{h} \\ &= \frac{3 - 5 - 3 - 5}{h} = \frac{-10}{h} \end{aligned}$$

عند  $x = -2$  ، ميل المماس  $= 2 - 5 = -3$

### قابلية الاشتقاق



## الاحظ ان

لبحث وجود نهـ  $\frac{د(٢) - د(هـ + ٢)}{هـ}$  للدالة مجزأة المجال والتي تغير قاعدتها يمين ويسار ٢

فإننا نوجد النهايتين اليمنى واليسرى كالتالى :

① نهـ  $\frac{د(٢) - د(هـ + ٢)}{هـ}$  وتسمى بالمشتقة اليمنى للدالة د عند  $س = ٢$  ونرمز لها بالرمز  $د^{+}(٢)$

② نهـ  $\frac{د(٢) - د(هـ + ٢)}{هـ}$  وتسمى بالمشتقة اليسرى للدالة د عند  $س = ٢$  ونرمز لها بالرمز  $د^{-}(٢)$

**الاستنتاج :** إذا كانت :  $د^{+}(٢) = د^{-}(٢)$  فإن الدالة قابلة للاشتقاق عند  $س = ٢$

## مثال

ابحث قابلية اشتقاق الدالة د :  $د(س) = \begin{cases} ٢ + ٢س & , س < ١ \\ ١ + س٢ & , س \geq ١ \end{cases}$  عند  $س = ١$

## الحل

$$د^{+}(١) = نهـ \frac{د(١) - د(هـ + ١)}{هـ} = نهـ \frac{[٢ + ٢(١)] - ٢ + ٢(هـ + ١)}{هـ}$$

$$= نهـ \frac{٣ - ٢ + ٢هـ + ٢ + ٢هـ + ٢}{هـ} = نهـ \frac{٣ - ٢ + ٢هـ + ٢ + ٢هـ + ٢}{هـ} = نهـ \frac{٣ - ٢ + ٢هـ + ٢ + ٢هـ + ٢}{هـ}$$

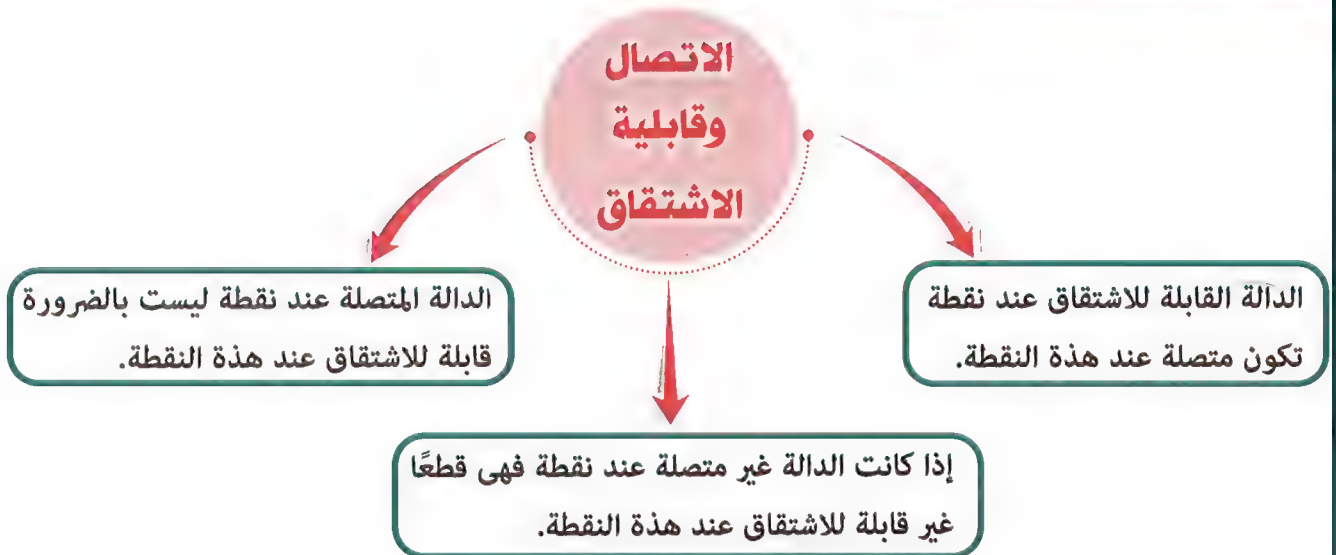
$$د^{-}(١) = نهـ \frac{د(١) - د(هـ + ١)}{هـ} = نهـ \frac{[١ + (١)٢] - ١ + (هـ + ١)٢}{هـ}$$

$$= نهـ \frac{٣ - ١ + هـ٢ + ٢هـ + ٢}{هـ} = نهـ \frac{٣ - ١ + هـ٢ + ٢هـ + ٢}{هـ}$$

$$\therefore د^{+}(١) = د^{-}(١)$$

$\therefore$  الدالة د قابلة للاشتقاق عند  $س = ١$





\* مما سبق يفضل بحث اتصال الدالة عند النقطة قبل بحث قابلية اشتقاقها عند هذه النقطة.

### مثال

ابحث اتصال الدالة د :

$$d(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & , x > 2 \\ 4 - x & , x \leq 2 \end{cases}$$

عند  $x = 2$  ثم ابحث قابلية الاشتقاق عند  $x = 2$  إذا كانت متصلة.

### الحل

$$\therefore d(2^+) = (2)^+ = 2 \quad , \quad d(2^-) = 4 - (2) = 2 \quad , \quad 1 - 5 = -4$$

$\therefore$  د متصلة عند  $x = 2$

$$\therefore d(2^+) = (2)^+ = 2 \quad , \quad d(2^-) = (2)^- = 2 \quad , \quad \text{نـهـ} = \frac{1 + 9 - (2 + 2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\therefore d(2^-) = (2)^- = 2 \quad , \quad d(2^+) = (2)^+ = 2 \quad , \quad \text{نـهـ} = \frac{1 + 5 - (2 + 2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore d(2^+) = d(2^-) = 2$$

$\therefore$  د قابلة للاشتقاق عند  $x = 2$

## مثال

إذا كانت الدالة د :

$$D(s) = \left. \begin{array}{l} 2 \leq s, \quad 1 + s^2 \\ 2 > s, \quad 3 - s \end{array} \right\}$$

متصلة عند  $s = 2$  أوجد  $\epsilon$  وابحث قابلية الاشتقاق عند  $s = 2$

## الحل

$$D(s) \text{ متصلة عند } s = 2 \therefore D(2^-) = D(2^+) = 1$$

$$D(2^-) = 3 - (2) = 1, \quad D(2^+) = 1 + (2)^2 = 5$$

$$\therefore D(2^+) = 5, \quad D(2^-) = 1 \quad \epsilon = \frac{5 - 1 + (h + 2)}{h} = \frac{4 + (h + 2)}{h} = \frac{6 + h}{h}$$

$$\epsilon = \frac{5 - 3 - (h + 2)}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \quad \therefore D(2^-) = 1, \quad D(2^+) = 5$$

$$\therefore D \text{ قابلة للاشتقاق عند } s = 2 \quad \therefore D(2^-) = D(2^+) = 1$$

## مثال

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة د :

$$D(s) = \left. \begin{array}{l} 2 \leq s, \quad 5 - s^2 \\ 2 > s, \quad 5 + s^2 \end{array} \right\}$$

عند  $s = 2$

## الحل

$$D(2^+) = 5 - (2)^2 = 1, \quad D(2^-) = 5 + (2)^2 = 9$$

$$\therefore D(2^-) = 9, \quad D(2^+) = 1$$

$\therefore$  الدالة د غير متصلة عند  $s = 2$

$\therefore$  الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند  $s = 2$

## مثال

أوجد قيمة  $\epsilon$  إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق

عند  $s = 2$  حيث

$$D(s) = \left. \begin{array}{l} 2 > s, \quad 3 + s^2 \\ 2 \leq s, \quad 1 + s^2 + 6 - s \end{array} \right\}$$

## الحل

$\therefore$  الدالة قابلة للاشتقاق عند  $s = 2$

$\therefore$  د متصلة عند  $s = 2$

$$\therefore D(2^-) = D(2^+) = 7$$

$$\therefore 3 + 2 \times 2 = 1 - (2) + 6 + 2 \times 2 = 7$$

$$\therefore \epsilon = 1$$



## قواعد الاشتقاق

### مشتقة الدالة الثابتة

$$\begin{aligned} d(س) &= ٠ \\ \therefore د(س) &= \text{صفر} \end{aligned}$$

### مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$\begin{aligned} \bullet d(س) &= س \times د(س) + د(س) \times س \\ \therefore د(س) &= س \times د(س) + د(س) \times س \\ &= \text{الاولى} \times \text{المشتقة الثانية} + \text{المشتقة الاولى} \times \text{الثانية} \end{aligned}$$

وبصفة عامة :

$$\begin{aligned} \bullet d(س) &= س \times د(س) + د(س) \times ل(س) \\ \therefore د(س) &= س \times د(س) + د(س) \times ل(س) \\ &= س \times د(س) + د(س) \times ل(س) \end{aligned}$$

### مشتقة دالة القوى

$$\begin{aligned} \bullet d(س) &= س^n \\ \therefore د(س) &= س^{n-1} \\ \bullet d(س) &= ١ \times س^{n-1} \\ \therefore د(س) &= س^{n-1} \end{aligned}$$

### مشتقة مجموع أو فرق بين دالتين

$$\begin{aligned} \bullet d(س) &= س \pm د(س) \\ \therefore د(س) &= س \pm د(س) \end{aligned}$$

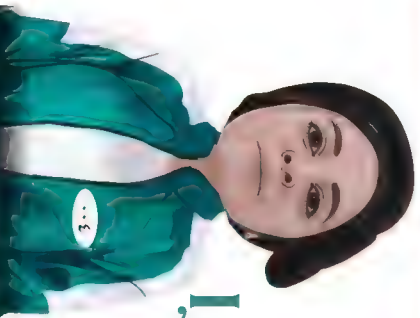
وبصفة عامة :

$$\begin{aligned} \bullet d(س) &= س \pm د(س) \pm ل(س) \pm \dots \pm س \\ \therefore د(س) &= س \pm د(س) \pm ل(س) \pm \dots \pm س \end{aligned}$$

### مشتقة قارح قسمة دالتين

$$\begin{aligned} \bullet \frac{د(س)}{ل(س)} &= \frac{د(س) \times ل(س) - ل(س) \times د(س)}{[ل(س)]^2} \\ \therefore د(س) &= \frac{د(س) \times ل(س) - ل(س) \times د(س)}{[ل(س)]^2} \end{aligned}$$

القواعد في 20٪ ليكر





إذا كانت : ص =  $س^{-3}$  فإن :  $\frac{ص}{س} = -3 - س^{-4}$

إذا كانت : د =  $(س) = 2\sqrt{2}$  فإن د = صفر

إذا كانت : د =  $(س) = 3 - س^0 - 4س + 5$   
فإن : د =  $(س) = 15 - 4س - 4$

إذا كان : و =  $(س) = 4س^{\frac{1}{2}}$  فإن :  
و =  $(س) = 2س - \frac{1}{2}$

إذا كانت د =  $(س) = \frac{3س - 4}{5س + 2}$   
فإن : د =  $(س) = \frac{2 \times (4 - 3س) - 3 \times (5س + 2)}{2(5س + 2)}$

إذا كانت : ص =  $(3س - 2)(5س^2 + 4س)$   
فإن :  $\frac{ص}{س} = (3س - 2)(5س + 4) = 3 \times (5س^2 + 4س) +$

## مشتقة دالة الدالة

### قاعدة السلسلة

إذا كانت : ص = د (ع) ، ع = م (س)

فإن :  $\frac{ص}{س} = \frac{د}{ع} \times \frac{ع}{س}$

### مشتقة : [د (س)]<sup>ن</sup>

إذا كانت : ص = [د (س)]<sup>ن</sup> فإن :  $\frac{ص}{س} = \frac{د}{س} \times [د (س)]^{ن-1}$

أي أن : مشتقة (قوس)<sup>ن</sup> =  $\frac{د}{س} \times (القوس)^{ن-1} \times$  مشتقة ما بداخل القوس.

### مشتقة ص<sup>ن</sup>

إذا كان : ص دالة في س

فإن :  $\frac{ص}{س} = (ص)^{ن-1} \times \frac{ص}{س}$

### مشتقة الجذر التربيعي

إذا كانت : ص =  $\sqrt{د (س)}$  فإن :  $\frac{ص}{س} = \frac{1}{2\sqrt{د (س)}} \times \frac{د}{س}$

أي أن : مشتقة الجذر التربيعي =  $\frac{1}{2(الجذر)} \times$  مشتقة ما تحت الجذر



### مثال

إذا كانت :  $ع = ص^2 + ص$

،  $ص = ص^2 - ٤$  -  $ص + ٧$  أوجد

:  $\frac{ع}{ص}$  عند  $ص = ٠$

### الحل

$$\frac{ع}{ص} = ٢ + ص = \frac{ع}{ص} ، ١ + ص = ٢ - ص - ٤$$

$$\therefore \frac{ع}{ص} \times \frac{ع}{ص} = \frac{ع}{ص}$$

$$(٤ - ص) \times (١ + ص) =$$

، عند  $ص = ٠$  فإن :  $ص = ٧$

$$\therefore \left(\frac{ع}{ص}\right) = ٠ = ١٥ \times ٤ - ٦٠ =$$

### مثال

إذا كانت :  $ص = \frac{٣ + ع}{١ - ع}$  ،  $\frac{١ + ص}{٣ - ص} = ع$

**أوجد** :  $\frac{ع}{ص}$  عندما  $ص = ٤$

### الحل

$$\frac{٤ -}{٢(١ - ع)} = \frac{(٣ + ع) - (١ - ع)}{٢(١ - ع)} = \frac{ع}{ع}$$

$$\frac{٤ -}{٢(٣ - ص)} = \frac{(١ + ص) - (٣ - ص)}{٢(٣ - ص)} = \frac{ع}{ع} ،$$

$$\therefore \frac{١٦}{٢(٣ - ص) ٢(١ - ع)} = \frac{ع}{ع} \times \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع} \therefore$$

، عند  $ص = ٤$  فإن :  $ع = ٥$

$$\therefore \left(\frac{ع}{ص}\right) = ٤ = \frac{١٦}{١ \times ١٦} = ١$$

### مثال

إذا كانت :  $ص = (ص^٣ + ٢ - ص - ٣)^٥$

**أوجد** :  $\frac{ع}{ص}$

### الحل

$$\frac{ع}{ص} = ٥ = (ص^٣ + ٢ - ص - ٣)^٤ (٣ - ص + ٢ + ٣)$$

### مثال

إذا كانت :  $ص^٢ + ١ = ٥ - ص$

**أوجد** :  $\frac{ع}{ص}$

### الحل

$$ص^٢ + ١ = ٥ - ص$$

$$\therefore ٣ ص^٢ = ٥ - \frac{ع}{ص} \therefore \frac{٥}{٣ ص} = \frac{ع}{ص}$$

### مثال

إذا كانت :  $ص = \left(\frac{١ + ص^٢}{٣ - ص}\right)^٥$  **أوجد** :  $\frac{ع}{ص}$

### الحل

$$\frac{٥ \times (١ + ص^٢)^٤ \times (١ - ص - ٦ - ص)}{٦(٣ - ص)} = \left(\frac{(١ + ص^٢) - ٢ \times (٣ - ص)}{٢(٣ - ص)}\right)^٤ \times \left(\frac{١ + ص^٢}{٣ - ص}\right)^٤ = \frac{ع}{ص}$$



## تطبيقات على المشتقة الأولى

### ميل المماس و ميل العمودي عليه لمنحنى

إذا كانت د دالة حيث  $ص = د(س)$  ،  $١(س)$  ،  $٢(س)$  نقطة على منحنى الدالة فإن :

١ ميل المماس للمنحنى عند  $١(س)$  ،  $٢(س)$  ،  $٣(س)$  =  $\left(\frac{د(س)}{س}\right) = ١(س)$  ،  $٢(س)$  ،  $٣(س)$

٢ ميل العمودي على المنحنى عند  $١(س)$  ،  $٢(س)$  ،  $٣(س)$  =  $١ - \left(\frac{د(س)}{س}\right) = ١(س)$  ،  $٢(س)$  ،  $٣(س)$

### معادلة المستقيم الذى ...

يمر بالنقطتين  $(١(س)$  ،  $٢(س)$  ،  $٣(س)$  ،  
يقطع محورى الإحداثيات  
فى  $(٠ ، ١)$  ،  $(٠ ، ٢)$  ،  $(٠ ، ٣)$

يمر بالنقطتين  $(١(س)$  ،  $٢(س)$  ،  $٣(س)$  ،  
الصادات فى  $(٠ ، ح)$

يمر بالنقطتين  $(١(س)$  ،  $٢(س)$  ،  $٣(س)$  ،  
الصادات فى  $(٠ ، ح)$

يمر بالنقطتين  $(١(س)$  ،  $٢(س)$  ،  $٣(س)$  ،  
الصادات فى  $(٠ ، ح)$

هى  
 $١ = \frac{ص}{١} + \frac{ص}{٢}$

هى  
 $ص = م س + ح$

هى  
 $ص - ص = م(س - س)$

هى  
 $\frac{ص - ص}{١ - ٢} = \frac{ص - ص}{١ - ٢}$

### ميل المستقيم الذى ...

يوازى  
محور  
الصادات

يوازى  
محور  
السينات

يمر بالنقطتين  
 $(١(س)$  ،  $٢(س)$  ،  $٣(س)$  ،  
 $(١(س)$  ،  $٢(س)$  ،  $٣(س)$  ،

متجه  $١ = (١ ، ٢)$   
هو متجه اتجاه له

يصنع زاوية موجبة  
قياسها مع الاتجاه  
الموجب لمحور السينات

معادلته  
 $١ س + ٢ ح = ٠$

يكون  
غير  
معرف

=  
صفر

=  
 $\frac{ص - ص}{١ - ٢}$

=  
 $\frac{٢}{١}$

=  
طاه

=  
 $\frac{١}{٢}$



## ملحظات

① إذا كان : ل ، ل<sub>٢</sub> مستقيمين ميلاهما معرفين م<sub>١</sub> ، م<sub>٢</sub> على الترتيب فإن :

• إذا كان : ل // ل<sub>٢</sub> فإن  $m_1 = m_2$  والعكس صحيح

• إذا كان : ل ⊥ ل<sub>٢</sub> فإن  $m_1 \times m_2 = -1$  والعكس صحيح

② معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ل) هى ص = ل

③ معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ل) هى ص = ل

④ معادلة محور السينات هى ص = ٠

⑤ معادلة محور الصادات هى ص = ٠

⑥ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل هى ص = م س حيث م ميل المستقيم

⑦ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س

⑧ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

⑨ لإيجاد نقط تقاطع منحنين نحل معادلتيهما آنياً.

## مثال

إذا كان المستقيم : ص = ٨ س + ٥ يمر بالمنحنى ص = ٢ س + ١ عند النقطة (١- ، ٣-) ، أوجد قيمتى ١ ، ٢

### الحل

∴ (١- ، ٣-) تقع على المنحنى

$$\therefore 3 - = 2(1 -) + 1$$

$$\therefore 3 - = 2 - 2 + 1 \quad (1)$$

∴ ميل المماس للمنحنى = ص = ٢ س + ١

∴ المستقيم : ص = ٨ س + ٥ يمر بالمنحنى عند (١- ، ٣-)

∴ ميل المستقيم = (ص) = ٨

$$\therefore 8 = 2 \quad (2)$$

بحل (١) ، (٢) : ∴ ١ = ٥ ، ٢ = ٢

## مثال

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس

لمنحنى الدالة د حيث :

د (س) =  $\frac{3 + س}{2 - س}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٣ ، ٦)

### الحل

$$د'(س) = \frac{(3 + س) - (2 - س)}{(2 - س)^2} = \frac{5 -}{(2 - س)^2}$$

$$\therefore د'(3) = \frac{5 -}{(2 - 3)^2} = 5 -$$

∴ ميل المماس للمنحنى عند (٣ ، ٦) = 5 -

$$\therefore \theta = 90^\circ - 1.109^\circ$$



## مثال

أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى د (س)  
 $2 = 2 - 3 - 4 - 3 + 3$  عند  $3 = 2$

### الحل

$$د (2) = 2 - 3(2) - 4(2) + 3 = 3$$

∴ النقطة (2، 3) تقع على المنحنى

$$، ∴ د (س) = 2 - 3 - 4 - 3 + 3$$

∴ عند النقطة (2، 3)

$$\text{ميل المماس} = 2 - 3(2) - 4(2) + 3 = 8$$

$$، \text{ ميل العمودي} = -\frac{1}{8}$$

∴ معادلة المماس هي :  $3 - 8 = 2 - 3$

$$، \text{ أى أن : } 3 - 8 = 2 - 3$$

معادلة العمودي هي :  $3 - 2 = 2 - 3$

$$، \text{ أى أن : } 3 - 2 = 2 - 3$$

## مثال

أوجد النقط الواقعة على المنحنى الذى معادلته  
 $ص = 2 - 4 - 3$  والتي يكون المماس  
 للمنحنى عندها.

① موازياً محور السينات.

② عمودياً على المستقيم :  $ص = \frac{1}{3} - 3$

### الحل

$$\text{ميل المماس للمنحنى المعطى} = \frac{ص}{س} = 2 - 4 - 3$$

① المماس للمنحنى يوازي محور السينات

∴ ميل المماس = صفر

$$∴ 2 - 4 - 3 = 0 ∴ 2 = 3$$

$$\text{ومنها } ص = 2 - 4(2) - 3 = -4$$

∴ النقطة هي : (2، -4)

② ميل العمودي =  $\frac{1}{3}$  ∴ ميل المماس = -3

$$∴ 2 - 4 - 3 = -3 ∴ 1 = 3$$

$$\text{ومنها } ص = 2 - 4(1) - 3 = -3$$

∴ النقطة هي : (1، -3)

## التكامل

◀ **التكامل** هو عملية عكسية للتفاضل أو الاشتقاق.

◀ **تسمى** الدالة الناتجة من عملية التكامل بالمشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة.

◀ **إذا كانت** الدالة ت : ت (س) مشتقة عكسية للدالة د : د (س) فإن :

• ت (س) هي تكامل د (س) بالنسبة لـ س وتكتب رمزياً ت (س) = ∫ د (س) د س

• ت (س) = د (س) أى أن  $\frac{د}{د س} = د (س)$

•  $\left[ \frac{د}{د س} \right] (ت) = د س = ت (س) + ث$

## خواص التكامل

$$* \int a \, dx = a \int 1 \, dx \text{ حيث } a \text{ ثابت } \neq 0$$

$$* \int [a \pm b] \, dx = \int a \, dx \pm \int b \, dx$$

ويمكن تعميمها كالتالي :  $\int [a \pm b \pm c \pm \dots] \, dx = \int a \, dx \pm \int b \, dx \pm \int c \, dx \pm \dots$

$$= \int a \, dx \pm \int b \, dx \pm \int c \, dx \pm \dots$$

## قواعد التكامل

إذا كانت  $u$  دالة في  $x$  ،  $u$  ثابتان بحيث  $u \neq 0$  فإن :

$$* \int u^a \, dx = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C \text{ نضيف « ١ » على الأس ثم نقسم على الأس الجديد}$$

$$* \int [a \, dx] u^a = \frac{[a \, dx]^{a+1}}{a+1} + C$$

تكامل حاصل ضرب قوس في مشتقة ما بداخل القوس  
نضيف « ١ » إلى أس القوس ونقسم على الأس الجديد

$$* \int (a + bx)^n \, dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{b} + C$$

## أمثلة لبعض التكاملات

$$* \int 5 \, dx = 5x + C \quad * \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$$* \int (x^2 + 2) \, dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C$$

$$* \int (1 - x)(2 + x) \, dx = \int (2 - x + x^2) \, dx = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$* \int \frac{x^2 - 5}{x} \, dx = \int (x - 5/x) \, dx = \frac{x^2}{2} - 5 \ln|x| + C$$

$$* \int \frac{(x^2 + 2)(4 + x^2 - 2x)}{4 + x^2 - 2x} \, dx = \int (x^2 + 2) \, dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2x + C$$

$$* \int (3 - 7x) \, dx = \frac{(3 - 7x)^2}{2} \times \frac{1}{-7} + C = -\frac{(3 - 7x)^2}{14} + C$$



$$+ \left[ \frac{1}{4} (5 + s^2 - 2s) (3 - s)^2 (5 + s^2 - 2s) \right].$$

**حاصل ضرب قوس في مشتقة ما بداخل القوس**

$$ث + \frac{1}{\varepsilon^-} (1 + \varepsilon^-) \times \frac{1}{\varepsilon^-} \times \frac{1}{\varepsilon^-} = \varepsilon^- (1 + \varepsilon^-) \varepsilon^- \left[ \frac{1}{\varepsilon^-} = \varepsilon^- \frac{\varepsilon^-}{(1 + \varepsilon^-)} \right].$$

$$\bullet \left[ \frac{g}{s} (s + \sqrt{s^2 + 5}) \right] = 5 + 4s + s^2$$

$$\sqrt{s} \varepsilon + \sqrt{s} \sqrt{0} = \sqrt{s} \left( \sqrt{s} \varepsilon + \sqrt{s} \sqrt{0} \right) \Big|_{\frac{s}{s}}.$$

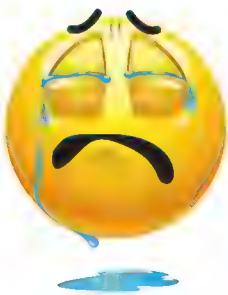
$$t + s^{\frac{1}{r}}(3-s) \frac{2}{11} = s s^{\frac{1}{r}}(3-s) \left[ = s s^{\frac{1}{r}}(3-s) \overline{3-s} \sqrt{1} \right].$$

$$\left[ s \frac{6}{s(3-s)} \right] + \left[ s \frac{3-s}{s(3-s)} \right] = \left[ s \frac{6+3-s}{s(3-s)} \right] = \left[ s \frac{3+s}{s(3-s)} \right].$$

$$s^{4-(3-s)} + s^{3-(3-s)} =$$

$$= -\frac{1}{2} - (3-s)^{-2} + (3-s)^{-3} + \text{ث}$$

# يا خاااااالي... يا عووووض..... و ذونني الورشة





$$\bullet \int \sin x (2 - \sin x) dx = \frac{1}{4} \sin^2 x - 2 \sin x + \text{ث}$$

$$\bullet \int (\sin x - \frac{\pi}{3} \cos x) dx = \sin x - \frac{\pi}{3} \sin x + \text{ث} \quad \text{« لاحظ أن } \frac{\pi}{3} \text{ قيمة ثابتة »}$$

$$\bullet \int (\sin^2 x - 3 \cos^2 x) dx = \frac{1}{4} \sin^2 x - 3 \cos^2 x + \text{ث}$$

$$\bullet \int (\sin x - \sin^2 x) dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \text{ث}$$

$$= \int (1 - \sin^2 x) dx = \frac{1}{4} \sin^2 x + \sin x + \text{ث}$$

$$\bullet \int (3 - \sin x) dx = \int (3 - \sin x) dx = 3x + \cos x + \text{ث}$$

$$= 3x - \sin x + \text{ث}$$

$$\bullet \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)}{1 + \sin x} dx = \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \sin x} dx = \int (1 - \cos x) dx = \sin x - \cos x + \text{ث}$$

$$= \sin x + \cos x + \text{ث}$$

$$\bullet \int \sin x \cos x dx = \int \left( \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + \text{ث}$$

$$\bullet \int (\sin x \cos x - \frac{\pi}{4} \sin x) dx = \int (\sin x \cos x) dx - \int \frac{\pi}{4} \sin x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{\pi}{4} \cos x + \text{ث}$$

$$\bullet \int (1 - \sin^2 x) dx = \int (1 - \sin^2 x) dx = x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \text{ث}$$

$$= \int (1 - \sin^2 x) dx = x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \text{ث}$$

$$= \int (1 - \sin^2 x) dx = x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{4} \sin^2 x - 2 \sin x + \text{ث}$$

الله يفتح عليك



**التجربة العشوائية :** هي تجربة يمكن معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها لكن لا نستطيع أن نحدد أيًا من هذه النواتج سيتحقق فعلاً عند إجرائها.

**فضاء العينة (فضاء النواتج) :** هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية ويرمز لها بالرمز (ف)

**الحدث :** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.


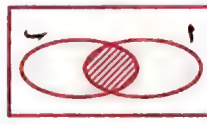


**وقوع الحدث :** يقال أن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية أحد عناصر المجموعة التي يتألف منها هذا الحدث.

**الحدث المؤكد (ف) :** هو حدث لا بد أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية.

**الحدث المستحيل ( $\emptyset$ ) :** هو حدث لا يمكن أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية.

**الحدث الأولي أو البسيط :** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى على عنصر واحد فقط.

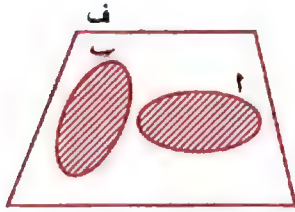
**العمليات على الأحداث :**

<p><b>٢) اتحاد حدثين (<math>A \cup B</math>)</b></p> <p>* هو حدث وقوع أ أو ب أو كليهما.</p> <p>* هو حدث وقوع أحدهما على الأقل.</p> 	<p><b>١) تقاطع حدثين (<math>A \cap B</math>)</b></p> <p>* هو حدث وقوع أ و ب معاً.</p> <p>* هو حدث وقوع الحدثين معاً.</p> 
<p><b>٤) الحدث المكمل (<math>A^c</math>)</b></p> <p>* هو حدث عدم وقوع أ.</p> 	<p><b>٣) الفرق بين حدثين (<math>A - B</math>)</b></p> <p>* هو حدث وقوع أ فقط</p> <p>* هو حدث وقوع أ وعدم وقوع ب</p> <p>* <math>A - B = A \cap B^c</math></p> 
<p><b>٥) قانون دي مورجان :</b> <math>(A \cup B)^c = A^c \cap B^c</math></p>	<p><b>٥) قانون دي مورجان :</b> <math>(A \cap B)^c = A^c \cup B^c</math></p>

• يقال أن الحدثين ١ ، ٢ متنافيان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر

أى : إذا كان  $1 \cap 2 = \emptyset$

• يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى.



### ملاحظة

\* الأحداث البسيطة (الأولية) المختلفة فى أى تجربة عشوائية تكون متنافية.

\* الحدث ١ ومكمله  $1^c$  حدثان متنافيان ويكون :

$$\textcircled{1} \quad 1 \cap 1^c = \emptyset \quad (\text{الحدث المستحيل}) \quad \textcircled{2} \quad 1 \cup 1^c = F \quad (\text{الحدث المؤكد})$$

### مثال

حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ ، سحب بطاقة واحدة عشوائياً ولوحظ العدد المسجل على البطاقة المسحوبة ، اكتب الأحداث الآتية :

- ١ حدث «العدد المسجل زوجى وأكبر من ١٠».
- ٢ حدث «العدد المسجل عامل من عوامل ١٢».
- ٣ حدث «العدد المسجل فردي ويقبل القسمة على ٣».
- ٤ حدث «العدد المسجل مضاعف مشترك للعددين ٢ ، ٥».
- ٥ حدث «العدد المسجل أولى».
- ٦ حدث «العدد المسجل يحقق المتباينة :  $5 \leq x \leq 17$ ».

### الحل

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 1 &= \{20, 18, 16, 14, 12\} \\ \textcircled{2} \quad 2 &= \{12, 6, 4, 2, 1\} \\ \textcircled{3} \quad 3 &= \{15, 9, 3\} \\ \textcircled{4} \quad 4 &= \{20, 10\} \\ \textcircled{5} \quad 5 &= \{19, 17, 13, 11, 7, 5, 3, 2\} \\ \textcircled{6} \quad 6 &= \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\} \end{aligned}$$

$$\therefore 5 \leq x \leq 20$$

$$\therefore 5 \leq x \leq 17$$

$$\therefore x \geq 4$$



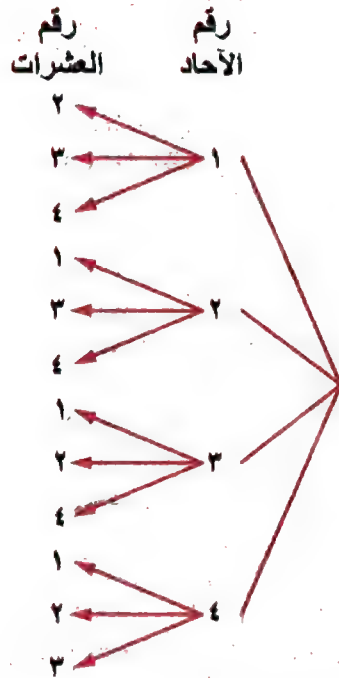
## مثال

من مجموعة الأرقام  $\{1, 2, 3, 4\}$  كُنْ عدداً من رقمين مختلفين.

مثل فضاء النواتج ف بشكل شجرة ، ثم اكتب ف وعين منها الأحداث الآتية :

- ١ حدث «أن يكون رقم الآحاد فردياً».
- ٢ حدث «أن يكون رقم العشرات فردياً».
- ٣ حدث «أن يكون كلا الرقمين فردياً».
- ٤ حدث «أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات فردياً».
- ٥ حدث «مجموعة الأعداد التي بها الآحاد ضعف العشرات».

## الحل



ف =  $\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

$\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

١ =  $\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

٢ =  $\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

٣ =  $\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

٤ =  $\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

$\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

٥ =  $\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$

## مثال

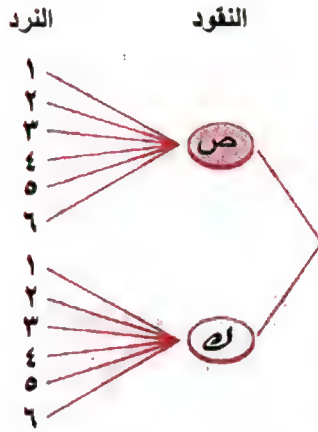
ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد ولوحظ الوجه العلوي لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد ،

مثل فضاء العينة بشكل شجري ثم أوجد الأحداث الآتية :

- ١ حدث «ظهور كتابة وعدد زوجي».
- ٢ حدث «ظهور صورة وعدد فردي».
- ٣ حدث «وقوع الحدث ١ ووقوع الحدث ٢».
- ٤ حدث «وقوع الحدث ١ فقط».
- ٥ حدث «عدم وقوع ١ أو عدم وقوع ٢».



## الحل



$$\textcircled{1} \quad \{(6, \text{ع}), (4, \text{ع}), (2, \text{ع})\} = \text{أ}$$

$$\textcircled{2} \quad \{(5, \text{ص}), (3, \text{ص}), (1, \text{ص})\} = \text{ب}$$

$$\textcircled{3} \quad \emptyset = \text{ب} \cap \text{أ} = \text{ج}$$

$$\textcircled{4} \quad \{(6, \text{ع}), (4, \text{ع}), (2, \text{ع})\} = \text{ب} - \text{أ} = \text{د}$$

$$\textcircled{5} \quad \text{هـ} = \emptyset = (\text{ب} \cap \text{أ}) = \text{ب} \cup \text{أ}$$

## مثال

عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات وتوقفت التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات

اكتب فضاء النواتج ثم عيّن الأحداث الآتية :

② ب حدث «ظهور صورة على الأقل».

① أ حدث «ظهور صورة على الأكثر».

④ د حدث «ظهور صورتين على الأقل».

③ ج حدث «ظهور كتابتين على الأقل».

## الحل

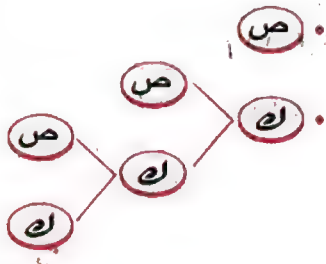
$$\text{ف} = \{(ص, \text{ع}, \text{ع}), (ص, \text{ع}, \text{ص}), (ص, \text{ص}, \text{ع}), (ص, \text{ص}, \text{ص}), (ع, \text{ع}, \text{ع}), (ع, \text{ع}, \text{ص}), (ع, \text{ص}, \text{ع}), (ع, \text{ص}, \text{ص})\}$$

$$\textcircled{1} \quad \text{أ} = \text{ف}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{ب} = \{(ص, \text{ع}, \text{ع}), (ص, \text{ع}, \text{ص}), (ص, \text{ص}, \text{ع}), (ص, \text{ص}, \text{ص})\}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{ج} = \{(ع, \text{ع}, \text{ع}), (ع, \text{ع}, \text{ص}), (ع, \text{ص}, \text{ع}), (ع, \text{ص}, \text{ص})\}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{د} = \emptyset$$



## حساب الاحتمال

إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانات ، فإن احتمال وقوع أى حدث  $\text{أ} \subset \text{ف}$  يعطى بالقانون :

$$\text{ل (أ)} = \frac{\text{عدد النواتج التي تؤدي إلى وقوع الحدث أ}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}} \quad \text{أى أن:} \quad \text{ل (أ)} = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$$



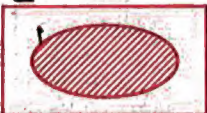









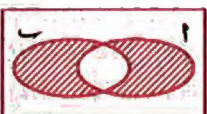
١) لكل حدث  $A \supset F$  يكون :  $0 \leq P(A) \leq 1$  أي أن :  $P(A) \in [0, 1]$

٢)  $P(\bar{A}) + P(A) = 1$  أو  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

٣) إذا كان :  $A, B$  حدثين متنافيين فإن :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

والجدول الآتي يلخص لنا احتمالات بعض الأحداث :

تمثيل الحدث بشكل فن	التعبير عنه لفظياً	احتمال الحدث
	* احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١	$P(F)$
	* احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر	$P(\emptyset)$
	* احتمال وقوع الحدث A	$P(A)$
	* احتمال الحدث المكمل للحدث A * احتمال عدم وقوع الحدث A	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
	* احتمال وقوع A ، B معاً.	$P(A \cap B)$
	* احتمال وقوع A أو B أو كليهما. * احتمال وقوع أحدهما على الأقل. * احتمال وقوع أي من الحدثين.	$P(A \cup B)$
	* احتمال وقوع A وعدم وقوع B * احتمال وقوع A فقط.	$P(A - B) = P(A \cap \bar{B})$ $P(A) - P(A \cap B)$
	* احتمال عدم وقوع الحدثين معاً. * احتمال وقوع أحدهما على الأكثر.	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$ $1 - P(A \cup B)$

	* احتمال عدم وقوع أى من الحدثين. * احتمال عدم وقوع A وعدم وقوع B	$J - (A \cup B) = J - (A \cup B)$
	* احتمال وقوع B أو عدم وقوع A * احتمال عدم وقوع A فقط.	$J - A = J - A$
	* احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر. * احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.	$J - (A \cap B) = J - (A \cap B)$

### مثال

إذا كان A ، B حدثين فى فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان :  $J(A) = \frac{1}{4}$

،  $J(B) = \frac{1}{4}$  ،  $J(A \cup B) = \frac{7}{12}$  أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :

- ① وقوع A ، B معاً. ② وقوع A وعدم وقوع B ③ وقوع A أو B فقط.

### الحل

$$J(A \cup B) = J(A) + J(B) - J(A \cap B)$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - J(A \cap B) \therefore J(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{7}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\text{① احتمال وقوع A ، B معاً} = J(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$\text{② احتمال وقوع A وعدم وقوع B} = J(A) - J(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{③ احتمال وقوع A أو B فقط} = J(A \cup B) - J(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

### مثال

إذا كان A ، B حدثين فى ف لتجربة عشوائية ما وكان :  $J(A) = \frac{2}{3}$  ،  $J(B) = \frac{1}{3}$

،  $J(A \cap B) = \frac{1}{12}$  أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

- ① أحدهما على الأقل. ② B فقط ③ عدم وقوع A أو B

### الحل

$$\text{① احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل} = J(A \cup B) = J(A) + J(B) - J(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\text{② احتمال وقوع B فقط} = J(B) - J(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{③ احتمال عدم وقوع A أو B} = J(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - J(A \cup B) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$



## مثال

٢ ، ب حدثان من فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث :  $\frac{3}{8} = (أ) ل$  ،  $\frac{3}{4} = (ب \cup أ) ل$  ،  
 فأوجد ل (ب) في كل من الحالتين :

١) ، ب حدثان متنافيان. ٢)  $\frac{1}{8} = (ب \cap أ) ل$

## الحل

$$\frac{5}{8} = \frac{3}{8} - ١ = (أ) ل - ١ = (أ) ل$$

١)  $\frac{1}{8} = (ب) ل \therefore (ب) ل + (أ) ل = (ب \cup أ) ل$   $\therefore \frac{3}{4} = \frac{5}{8} + (ب) ل$   $\therefore (ب) ل = \frac{1}{8}$

٢)  $(ب \cap أ) ل - (ب) ل + (أ) ل = (ب \cup أ) ل$

$$\frac{1}{8} = (ب) ل \therefore \frac{1}{8} - (ب) ل + \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \therefore$$

## مثال

إذا كان : ٢ ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ف

$$٠,١٥ = (أ \cap ب) ل ، ٠,٢٤ = (ب - أ) ل ، \frac{4}{5} ل (أ) ،$$

أوجد : ل (أ) ، ل (ب) ، ل (ب \cup أ)

## الحل

$$٠,٢٤ = (ب - أ) ل \therefore ٠,٢٤ = (ب \cap أ) ل - (أ) ل$$

(١)  $(ب \cap أ) ل + ٠,٢٤ = (أ) ل$

$$٠,١٥ = (أ - ب) ل = (أ \cap ب) ل - (ب) ل$$

(٢)  $٠,١٥ = (ب \cap أ) ل - (ب) ل$   $\therefore (ب \cap أ) ل + ٠,١٥ = (ب) ل$

من (١) ، (٢) :  $\frac{4}{5} ل (أ) \therefore (أ) ل = \frac{4}{5} ل$   $\therefore (ب \cap أ) ل + ٠,١٥ = \left( (ب \cap أ) ل + ٠,٢٤ \right) \frac{4}{5}$

$$\therefore ٠,٧٥ = (ب \cap أ) ل + ٠,٩٦ = (ب \cap أ) ل + ٠,٤٨$$

$$\therefore ٠,٢٧ = (ب \cap أ) ل \therefore ٠,٢١ = (أ) ل - ٠,٢٤ = ٠,٤٥$$

$$٠,٣٦ = ٠,٢١ + ٠,١٥ = (ب) ل$$

$$\therefore (ب \cup أ) ل = (ب \cap أ) ل + (أ) ل - (ب \cap أ) ل = ٠,٣٦ + ٠,٢١ = ٠,٥٧$$



## مثال

إذا كان احتمال نجاح طالب في امتحان الرياضيات ٠,٨٥ ، واحتمال نجاحه في امتحان الإحصاء ٠,٩ ، واحتمال نجاحه في الامتحانين معاً ٠,٨ **أوجد احتمال :**

١) نجاح الطالب في أحد الامتحانين على الأقل.

٢) نجاح الطالب في امتحان الإحصاء فقط.

٣) عدم نجاح الطالب في الامتحانين معاً.

## الحل

بفرض أن : حدث نجاح الطالب في الرياضيات =  $A$  ، حدث نجاح الطالب في الإحصاء =  $B$

$$\therefore P(A) = 0,85 , P(B) = 0,9 , P(A \cap B) = 0,8$$

$$١) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,85 + 0,9 - 0,8 = 0,95$$

$$٢) P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,9 - 0,8 = 0,1$$

$$٣) P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,8 = 0,2$$

## مثال

إذا كان ف = {  $A, B, C, D$  } فضاء عينة لتجربة عشوائية **أوجد :**

$$١) P(A) , P(B) \text{ إذا كان : } P(A) = 3P(B) , P(C) = P(D) = \frac{1}{18}$$

## الحل

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$$

$$\therefore P(A) = 3P(B) , P(C) = P(D) = \frac{1}{18}$$

$$\therefore 1 = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + P(B) + 3P(B)$$

$$\therefore \frac{2}{9} = \frac{14}{18} - 1 = 3P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{2}{9}$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{18}$$

$$P(A) = 3P(B) = \frac{1}{6}$$

